БЕЛКООПСОЮЗ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ОБЩИЙ КУРС

Пособие
(программа курса, задания контрольных работ № 1 и № 2 и методические рекомендации по их выполнению) для студентов первого курса заочной формы обучения специальностей «Коммерческая деятельность», «Товароведение и экспертиза товаров», «Маркетинг»

Гомель 2002

ББК 22.11
В 93

Авторы-составители: *А. П. Кохно*, канд. физ.-мат. наук, доцент;
Н. Д. Романенко, канд. физ.-мат. наук, доцент;
С. А. Мокеева, *И. А. Кузменкова*, ассистенты

Рецензенты: *В. С. Монахов*, д-р физ.-мат. наук, профессор Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины;
Л. П. Авдашкова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 5 от 11 июня 2002 г.

В 93 **Высшая** математика. Общий курс: Пособие (программа курса, задания контрольных работ № 1 и № 2 и методические рекомендации по их выполнению) для студентов первого курса заочной формы обучения специальностей «Коммерческая деятельность», «Товароведение и экспертиза товаров», «Маркетинг» / Авторы-составители: *А. П. К*охно, *Н. Д. Романенко, С. А. Мокеева, И. А. Кузменкова*. — Гомель: УО «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». — 104 с.
ISBN 985-461-051-9

ББК 22.11

ISBN 985-461-051-9

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Квалифицированное и осознанное владение понятиями высшей математики и экономико-математическими методами является неотъемлемой частью высшего экономического образования.

Высшая математика, изучаемая на первом курсе, является фундаментом математической подготовки специалиста университетской квалификации экономического профиля.

В пособие включены программа курса, задания контрольных работ № 1, № 2 и требования к их оформлению. Методические указания по выполнению заданий контрольных работ содержат краткие теоретические сведения, знание которых необходимо для решения контрольных заданий. Вопросы для самопроверки позволяют организовать контроль знаний при самостоятельной работе и подготовиться к выполнению контрольных работ. В конце каждой темы в качестве примера оформления решения каждого задания приведена типовая задача.

Вопросы экзаменационных билетов составлены на основании программы курса.

Список рекомендуемой литературы включает наименования основных литературных источников, которые необходимо использовать при изучении курса и выполнении заданий контрольных работ.

ПРОГРАММА КУРСА

Тема 1. Матрицы

Понятие матрицы. Операции над матрицами. Понятия определителей первого, второго и третьего порядков. Определители n-го порядка. Разложение определителя по строке или столбцу. Свойства определителей. Обратная матрица. Задача межотраслевого баланса (модель Леонтьева) и ее решение с помощью обратной матрицы. Транспонирование матриц. Ранг матрицы.

Тема 2. Системы линейных уравнений

Экономические задачи, приводящие к системам линейных уравнений. Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод Гаусса.

Тема 3. Векторы

Понятие вектора на плоскости. Декартова прямоугольная система координат в трехмерном пространстве и понятие вектора в трехмерном пространстве. Векторы в пространстве R^n и основные операции над ними. Скалярное произведение векторов. Линейные комбинации векторов. Линейно независимые системы векторов. Базис и ранг системы векторов. Разложение вектора по базису.

Тема 4. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Системы линейных неравенств

Прямоугольная система координат на плоскости. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Уравнение прямой в отрезках. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Кривые второго порядка на плоскости. Примеры кривых второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола.

Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве. Плоскость в пространстве. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно к заданному вектору. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями. Прямая в пространстве. Общее уравнение прямой в пространстве. Параметрические и канонические уравнения прямой. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Экономические задачи, приводящие к системам линейных уравнений и неравенств. Системы линейных неравенств. Смешанные системы линейных уравнений и неравенств. Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений и неравенств. Графический метод решения системы линейных неравенств с двумя переменными.

Тема 5. Функции одной переменной. Непрерывность

Понятие функции. Область определения и область значений функций. Способы задания функций. Графики функций. Примеры функций. Сложные функции. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы. Односторонние пределы. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.

Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва. Непрерывность монотонной функции. Непрерывность сложной и обратной функций. Непрерывность элементарных функций. Функции, непрерывные на множестве, и их свойства.

Тема 6. Дифференцирование функции одной переменной

Производная функции. Геометрический, механический и экономический смысл производной. Правила дифференцирования. Производные сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Таблица производных элементарных функций. Логарифмическая производная. Дифференциал, его геометрический и экономический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Примеры применения производной в экономике (эластичность спроса относительно цены, предельные издержки производства). Производные высших порядков. Неявные функции. Теорема о неявной функции. Стационарные точки. Теоремы Ферма и Ролля. Теорема Лагранжа и формула конечных приращений. Теорема Коши. Правило Лопиталя. Условие постоянства функций. Условия монотонности функций. Экстремум функции. Необходимое и достаточные условия экстремума дифференцируемой функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Условия выпуклости и вогнутости.

Точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функции. Построение графика функции.

Тема 7. Функции нескольких переменных. Дифференцирование функции нескольких переменных

Функции нескольких переменных. Предел функции в точке. Непрерывность. Частные производные. Примеры применения частных производных в экономике. Дифференцируемость функции. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Градиент функции и его свойства.

Тема 8. Неопределенный интеграл

Первообразная функции и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Метод замены переменной. Формула интегрирования по частям. Таблица неопределенных интегралов. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование рациональных выражений, содержащих тригонометрические функции.

Тема 9. Определенный интеграл и его применение

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Методы вычисления определенного интеграла. Необходимые условия интегрируемости функций. Достаточные условия интегрируемости функций. Применение определенного интеграла в экономике. Применение определенного интеграла для вычисления площадей фигур, длин дуг плоских кривых и объемов тел вращения. Приближенные методы вычисления определенных интегралов. Несобственные интегралы.

Тема 10. Дифференциальные уравнения

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка. Составление дифференциального уравнения первого порядка. Макромодель Домара. Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Конечные разности и обыкновенные разностные уравнения. Линейные стационарные разностные уравнения. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные нестационарные разностные уравнения.

Тема 11. Ряды

Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда. Простейшие свойства сходящихся числовых рядов с положительными членами. Необходимые и достаточные признаки сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

Функциональные ряды. Степенной ряд. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Необходимый и достаточный признаки разложения функции в ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Применение рядов к приближенным вычислениям.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

1. Задания 1 и 2 по теме «Элементы аналитической геометрии на плоскости»

Краткие теоретические сведения

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \quad (1)$$

Уравнение прямой A_1A_2, проходящей через точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,. \quad (2)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\ (x_0;\ y_0)$ *и имеющей угловой коэффициент* k, записывается в следующем виде:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0). \quad (3)$$

Общее уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By + C = 0. \quad (4)$$

Вектор $\overline{n} = (A; B)$ называется *нормальным вектором*.

Координаты точки $(x_0;\ y_0)$, являющейся *серединой отрезка* A_1A_2 с концами в указанных точках, вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}\,, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}\,. \quad (5)$$

Тангенс угла φ *между прямыми* $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$ определяется следующей формулой:

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\,. \quad (6)$$

Следствие 1. Две прямые $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$ *параллельны* тогда и только тогда, когда

$$k_1 = k_2. \tag{7}$$

Следствие 2. Две прямые $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$ *взаимно перпендикулярны* тогда и только тогда, когда

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \tag{8}$$

Расстояние d от точки M_0 $(x_0;\ y_0)$ *до прямой* (4) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9}$$

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке M_0 $(x_0; y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{10}$$

Каноническое *уравнение эллипса* (рис. 1) записывается в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

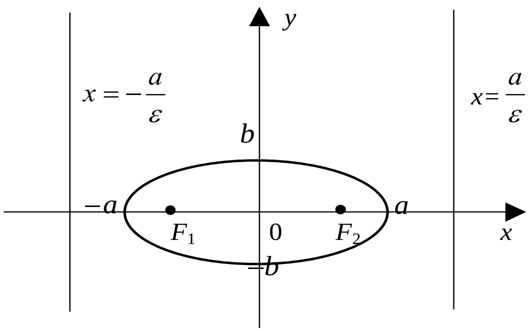

Рис. 1

На рис. 1 $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ — *фокусы*, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, a — *большая полуось*, b — *малая полуось*, $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ — *эксцентриситет* ($\varepsilon < 1$, так как $c < a$), $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ — *директрисы.*

Каноническое уравнение гиперболы (рис. 2) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (12)$$

На рис. 2 $F_1(-c;\,0)$, $F_2(c;\,0)$ — *фокусы*, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, a — *действительная полуось*, b — *мнимая полуось*, $\varepsilon=\frac{c}{a}$ — *эксцентриситет* ($\varepsilon>1$, так как $c<a$), $y=\pm\frac{b}{a}x$ — *асимптоты*, $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ — *директрисы*.

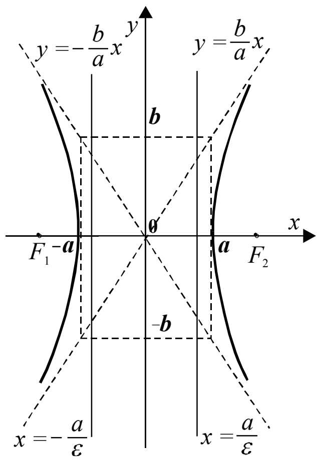

Рис. 2

Каноническое уравнение параболы (рис. 3) имеет вид

$$y^2 = 2px. \qquad (13)$$

При этом $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ — *фокус*, $x=-\frac{p}{2}$ — *директриса* (p — параметр параболы, расстояние от фокуса параболы до ее директрисы).

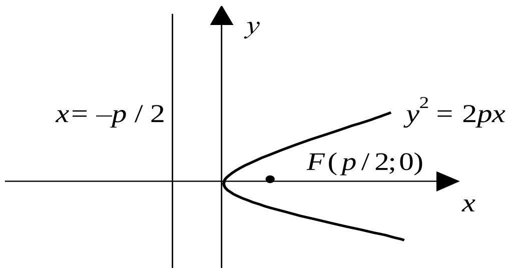

Рис. 3

Другие случаи расположения параболы указаны на рисунках 4–6.

Точки, симметричные относительно прямой, — это точки, лежащие на одном перпендикуляре к прямой, на одинаковых расстояниях и по разные стороны от нее.

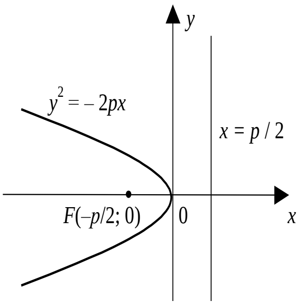

Рис. 4

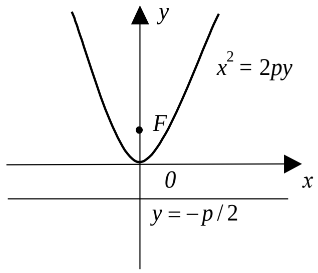

Рис. 5

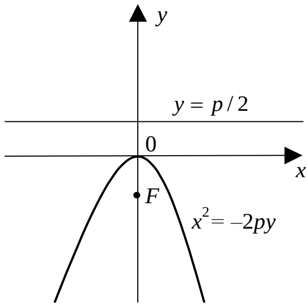

Рис. 6

Вопросы для самопроверки

1. Как в аналитической геометрии определяется линия? Приведите примеры.
2. Каким образом находится точка пересечения двух линий на плоскости? Приведите примеры.
3. Какие существуют методы построения прямой на плоскости? Какие виды уравнений прямой на плоскости вы знаете?
4. Как находится длина высоты в треугольнике? Приведите примеры.
5. Какие условия являются необходимыми и достаточными для параллельности и перпендикулярности двух прямых?
6. Какая точка называется образом точки *M* при осевой симметрии?
7. Какие существуют типы кривых второго порядка? Каковы канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы?

8. Что мы называем фокусами и эксцентриситетом эллипса, гиперболы? Что называется фокусом, директрисой параболы? Что мы называем асимптотами гиперболы?

9. Как определить координаты начала новой системы координат относительно старой при параллельном переносе?

10. Какие примеры зависимостей между величинами в экономике, которые выражаются алгебраическими уравнениями первого и второго порядков, вы знаете?

Типовая задача 1

Даны вершины $A(-1;\ 1)$, $B(5;\ 4)$, $C(2;\ 5)$ треугольника ABC.

Найти: 1) длину стороны AB; 2) внутренний угол A; 3) уравнение медианы, проведенной из вершины C; 4) точку P пересечения высот треугольника; 5) длину высоты, опущенной из вершины C; 6) образ точки P при осевой симметрии относительно прямой AB; 7) уравнение прямой a, проходящей через точку P, параллельной прямой AB. Сделать чертеж.

Решение. На рис. 7 представим чертеж.

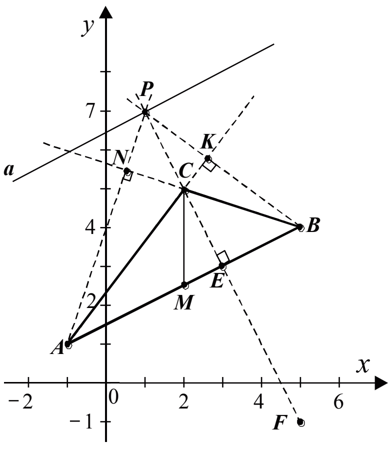

Рис. 7

1) По формуле (1) имеем:

$$|AB| = \sqrt{(5+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}\ .$$

2) Определим вначале по формуле (2) уравнения прямых *AB*, *AC* и их угловые коэффициенты.

Уравнение прямой *AB*:

$$\frac{x-(-1)}{5-(-1)}=\frac{y-1}{4-1}.$$

Отсюда $\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-1}{3}$, $y-1=\dfrac{1}{2}\cdot(x+1)$, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\Rightarrow k_{AB}=\dfrac{1}{2}$.

Уравнение прямой *AC*:

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-1}{5-1}.$$

Отсюда $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{4}$, $y-1=\dfrac{4}{3}\cdot(x+1)$, $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{3}\Rightarrow k_{AC}=\dfrac{4}{3}$.

По формуле (6) находим тангенс угла между прямыми *AB* и *AC*:

$$tg\ A=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}\Rightarrow tg\ A=\frac{1}{2}\Rightarrow \angle A=arctg\,\frac{1}{2}.$$

3) По формулам (5) находим координаты середины *M* стороны *AB* треугольника:

$$x_0=\frac{5-1}{2}=2,\ y_0=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5,\ M(2;\,2{,}5).$$

По формуле (2) находим уравнение медианы *CM*:

$$\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-5}{2{,}5-5},\ \frac{x-2}{0}=\frac{y-5}{-2{,}5}.$$

Раскрывая пропорцию, имеем $x-2=0\Rightarrow x=2$.

Это и есть искомое уравнение медианы.

4) По формуле (2) определим уравнение третьей прямой *BC* треугольника:

$$\frac{x-5}{2-5}=\frac{y-4}{5-4},\ y-4=-\frac{1}{3}\cdot(x-5),\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}.$$

Отсюда $k_{BC} = -\frac{1}{3}$.

Пусть $AN \perp BC$, тогда по формуле (8) имеем: $k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = 3$.

Используя формулу (3), запишем уравнение прямой *AN*:

$$y - 1 = 3 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow y = 3x + 4.$$

Аналогично находим уравнение прямой *BK*, которая перпендикулярна *AC*. Так как $k_{AC} = \frac{4}{3}$, $BK \perp AC$, то по следствию 2 имеем:

$$k_{BK} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{3}{4}; \; y - 4 = -\frac{3}{4} \cdot (x - 5),$$

$$y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 5) + 4 \Rightarrow \; y = -\frac{3}{4}x + \frac{31}{4}.$$

Координаты точки *P* находим как решение системы уравнений, составленной из уравнений высот *AN* и *BK*:

$$\begin{cases} y = 3x + 4, \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{31}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{31}{4}, \\ y = 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}, \text{ т. е. } P(1;\, 7).$$

5) Длина высоты *CE*, опущенной из вершины *C* на сторону *AB*, есть расстояние от этой точки *C* до *AB*. Найдем уравнение прямой *AB*:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow x - 2y + 3 = 0.$$

По формуле (9), $|CE| = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

6) Пусть $F(\alpha; \beta)$ — образ точки *P*(1; 7) при осевой симметрии с осью симметрии *AB*. Тогда на основании определения осевой симметрии $\overline{PF} = k \cdot \overline{n}$ ($\overline{n}$ — нормальный вектор прямой *AB*) и $|PE| = |EF|$. Так как $\overline{PF} = (\alpha - 1; \beta - 7)$, $\overline{n}$ =(1; –2), то $(\alpha - 1; \beta - 7) = k \cdot (1; -2)$.

Отсюда $\begin{cases} \alpha - 1 = k, \\ \beta - 7 = -2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = k + 1, \\ \beta = -2k + 7. \end{cases}$

Из формулы (9) получим:

$$|PE| = \frac{|1\cdot 1 - 2\cdot 7 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}},\ |EF| = \frac{|1\cdot\alpha - 2\cdot\beta + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|k+1+4k-14+3|}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{|5k-10|}{\sqrt{5}}.$$

Так как $|PE| = |EF|$, то $|5k-10| = 10 \Rightarrow 5k - 10 = \pm 10 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0, \\ k = 4. \end{array}\right.$

При $k = 0$ получаем известную точку $P(1;\ 7)$, при $k = 4$ — точку $F(5;\ -1)$.

7) По формуле (7), так как $k_a = k_{AB} = \dfrac{1}{2}$ и $P(1;\ 7)$, имеем: $y - 7 = \dfrac{1}{2}\cdot(x-1)$. Следовательно, $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{13}{2}$ — уравнение прямой a.

Ответ: 1) $3\sqrt{5}$; 2) $\angle A = arctg\dfrac{1}{2}$; 3) $x = 2$; 4) $P(1;\ 7)$; 5) $\sqrt{5}$;
6) $F(5;\ -1)$; 7) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{13}{2}$.

Во втором задании необходимо составить уравнение линии, обладающей определенным свойством.

Алгоритм решения задачи этого задания может быть следующим:

1. Выбирается произвольная точка $M(x;\ y)$ данной линии.
2. В координатной форме составляется уравнение линии на основе учета ее указанных свойств.
3. С помощью алгебраических преобразований полученное уравнение приводится к каноническому виду.

Типовая задача 2

Составить уравнение линии, если отношение расстояний от каждой ее точки до точки $A(-1;\ 0)$ и до прямой $x = -4$ равно $\dfrac{1}{3}$. Построить график.

Решение. 1. Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка данной линии.

2. По формуле (1) находим расстояние $|AM|$ и расстояние от точки M до ее проекции M_1 на прямую $x = -4$:

$$|AM| = \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2},$$

$$|MM_1| = \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-y)^2} = |x+4|.$$

По условию задачи, $\dfrac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{|x+4|} = \dfrac{1}{3}$.

3. Преобразуем полученное уравнение:

$3 \cdot \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x+4| \Rightarrow 9 \cdot (x^2 + 2x + 1 + y^2) = x^2 + 8x + 16.$

Отсюда $8x^2 + 10x + 9y^2 + (-7) = 0 \Rightarrow 8 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \dfrac{5}{8} x + \dfrac{25}{64}\right) + 9y^2 =$
$= \dfrac{81}{8} \Rightarrow \dfrac{\left(x + \frac{5}{8}\right)^2}{\frac{81}{64}} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{8}} = 1$.

С помощью формул параллельного переноса приведем уравнение к каноническому виду.

Пусть
$$\begin{cases} x + \dfrac{5}{8} = X, \\ y = Y. \end{cases} \tag{14}$$

Тогда уравнение линии запишем в виде $\dfrac{X^2}{\frac{81}{64}} + \dfrac{Y^2}{\frac{9}{8}} = 1$. Это уравнение эллипса с полуосями $a = \dfrac{9}{8}$ и $b = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$. Так как $a > b$, то фокусы его находятся на оси OX. Из формул (14) получаем $\begin{cases} x = X - \dfrac{5}{8}, \\ y = Y. \end{cases}$

Точка $O'\left(-\dfrac{5}{8}; 0\right)$ есть начало новой системы координат XOY относительно старой. Строим график данного эллипса в новой системе координат (рис. 8).

Ответ:

$$\frac{\left(x+\frac{5}{8}\right)^2}{\frac{81}{64}}+\frac{y^2}{\frac{9}{8}}=1.$$

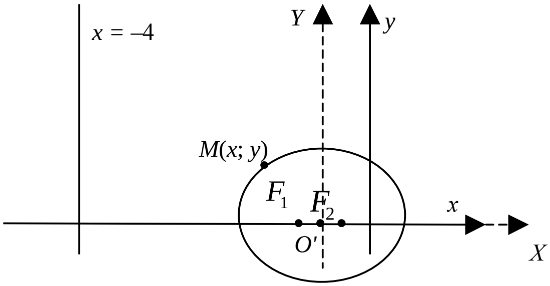

Рис. 8

2. Задания 3 и 4 по теме «Элементы линейной алгебры и теории *n*-мерных векторных пространств»

Краткие теоретические сведения

Понятие n-мерного вектора

Любой упорядоченный набор из *n* действительных чисел $\bar{a}$ = (x_1, x_2, …, x_n) называется *n-мерным вектором*; при этом числа $x_i (i=\overline{1,n})$, составляющие упомянутый набор, называются *координатами вектора* $\bar{a}$.

В экономике *n*-мерный вектор часто интерпретируется как набор закупаемых потребителем товаров в соответствующих единицах измерения.

Множество всех *n*-мерных векторов называется *n-мерным векторным пространством R^n*.

Вектор $\bar{0}$ = (0,0, …, 0), все координаты которого равны нулю, называется *нулевым*. *Суммой* двух векторов $\bar{a}$ = (x_1, x_2, …, x_n) и $\bar{b}$ = (y_1, y_2, …, y_n) будем называть такой вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ =(x_1 + y_1, x_2 + y_2, …,

$x_n + y_n$), координаты которого равны суммам соответствующих координат векторов слагаемых.

Пусть $\lambda \in R$. *Произведением вектора* $\overline{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *на число* λ будем называть вектор $\overline{c} = \lambda\overline{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$, координаты которого получаются умножением соответствующих координат вектора $\overline{a}$ на число λ.

Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением векторов $\overline{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\overline{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется число $\overline{a} \cdot \overline{b}$, равное сумме произведений соответствующих координат векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n .$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.
2. $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$, $\lambda \in R$.
3. $\overline{a} \cdot (\overline{c} + \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{b}$.
4. $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$, если $\overline{a} \neq 0$, и $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{0}$, если $\overline{a} = \overline{0}$.

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k$ называется вектор вида

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_k \overline{a_k} , \tag{1}$$

где $\lambda_i \in R$, $i = \overline{1,k}$.

Пример. Пусть $\overline{a_1} = (2;1;0)$, $\overline{a_2} = (1;0;1)$, $\overline{a_3} = (0;1;2)$. Вектор $\overline{b} = (0;4;4)$ — линейная комбинация векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$, так как $\overline{b} = 1 \cdot \overline{a_1} - 2 \cdot \overline{a_2} + 3 \cdot \overline{a_3}$.

В случае выполнения равенства (1) говорят, что вектор $\bar{b}$ *линейно выражается* через векторы $\overline{a_i}$, $i=\overline{1,k}$ или *разлагается* по этим векторам.

Система ненулевых векторов вида

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k \tag{2}$$

называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_i \in R$, $i=\overline{1,k}$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_k \overline{a_k} = \bar{0}. \tag{3}$$

Если же равенство (3) для данной системы векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то эта система векторов называется *линейно независимой.*

Базис и ранг системы векторов

Пусть дана система векторов (2).

Максимальной линейно независимой подсистемой системы векторов (2) называется такой частичный набор векторов этой системы, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Векторы этого набора линейно независимы.
2. Любой вектор системы (2) линейно выражается через векторы этого набора.

Максимальная линейно независимая подсистема системы векторов (2) называется ее *базисом.*

Будем называть *рангом* системы векторов число векторов ее базиса.

Система векторов называется *базисом пространства* R^n, если:

1. Векторы этой системы линейно независимы.
2. Всякий вектор из R^n линейно выражается через векторы данной системы.

Матрицы

Прямоугольная таблица чисел вида

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей* $m \times n$.

Здесь a_{ij} — действительные числа ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$), которые называются *элементами матрицы.* Индекс i указывает на *номер строки*, а индекс j — *номер столбца*. На их пересечении находится элемент a_{ij}.

Матрица, все элементы которой являются нулями, называется *нулевой.*

В случае, когда $m = n$ (число строк равно числу столбцов), матрица A называется *квадратной матрицей n-го порядка*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы называется ее диагональ, составленная из элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Квадратная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется *единичной*, если элементы ее *главной диагонали* равны единице, а все остальные элементы — нулю.

Очевидно, строки матрицы $A_{n\times m}$ образуют систему n-мерных векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Рангом матрицы $A_{n\times m}$ назовем ранг этой системы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Следующие преобразования матрицы A назовем *элементарными*:

1. Перестановка местами двух ее строк (столбцов).
2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.

3. Прибавление к элементам некоторой строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число.

Теорема. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.*

Для практического вычисления ранга матрицы A ее удобно при помощи элементарных преобразований приводить к виду

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a'_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда ранг матрицы A равен числу единиц на диагонали матрицы A', т. е. числу r.

Действия над матрицами

Суммой двух матриц $A_{n\times m} = (a_{ij})$ и $B_{n\times m} = (b_{ij})$ называется такая третья матрица $C_{n\times m} = (c_{ij})$, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Произведением матрицы $A_{n\times m} = (a_{ij})$ *на число* λ называется такая матрица $B_{n\times m} = \lambda \cdot A_{n\times m} = (d_{ij})$, что $d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, то $C = 2A - 3B =$

$$= 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 & -6 \\ 6 & -3 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -8 & 4 \\ 6 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц $A_{n\times m} = (a_{ij})$ и $B_{m\times k} = (b_{ij})$ называется такая третья матрица $C_{n\times k} = (c_{ij})$, что $c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{im}\cdot b_{mj}$.

Пример. Если $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, то $C = A \cdot B =$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 1-2\cdot(-1) & 2\cdot 0-2\cdot(-2) & 2\cdot 2-2\cdot 3\\ 3\cdot 1+1\cdot(-1) & 3\cdot 0+1\cdot(-2) & 3\cdot 2+1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 9\end{pmatrix}.$$

Определители

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $det\,A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее *определителем,* следующим образом:

1. Если n = 1, A = (a_{11}), тогда *определитель первого порядка* имеет вид

$$|A| = \Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}.$$

2. Если n = 2, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, тогда *определитель второго порядка* вычисляется по формуле

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}.$$

3. Если n = 3, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, то матрице *третьего порядка* соответствует определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - \\ - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}.$$

Это выражение получается по правилу треугольников (правилу Саррюса). Его можно пояснить схемами, на которых элементы, входящие в одно произведение с указанным знаком, соединены отрезками (рис. 9).

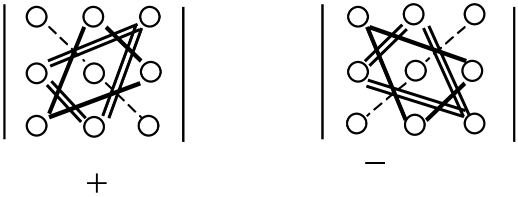

Рис. 9

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 4\cdot(-2) + 3\cdot 2\cdot 3 - (-2)\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot 1 - -2\cdot(-1)\cdot 1 = 0 + 8 + 18 - 0 - 12 + 2 = 16.$$

Миноры и алгебраические дополнения

Квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

n-го порядка соответствует определитель, имеющий порядок n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

являющийся самостоятельным объектом изучения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя (5) называется определитель $(n-1)$ порядка, получающийся из определителя (5) вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится этот элемент a_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} определителя (5) называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Определитель Δ_n находится по формуле

$$\Delta_n = \begin{cases} a_{11}, & \text{если } n = 1; \\ a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

При этом i — любое из чисел 1, 2,…, n.

Пример. Пусть дан определитель $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Тогда $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = 1 \cdot 1 = 1.$

Применение определителей

Теорема 1. *Векторы* $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ *тогда и только тогда образуют базис пространства* R^n, *когда определитель* Δ_n, *образованный из координат этих векторов, отличен от нуля.*

Матрица B называется *обратной матрицей* по отношению к матрице A (4), если их произведение равно единичной матрице:

$$AB = BA = E.$$

Для матрицы B, обратной по отношению к A, существует специальное обозначение A^{-1}.

Теорема 2. *Квадратная матрица* (4) *тогда и только тогда имеет обратную, если ее определитель* (5) *отличен от нуля*.

Справедлива следующая формула для нахождения обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_n} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10 \neq 0.$

Матрица A имеет обратную:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot (-4) = -4,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot 2 = -2,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot 3 = -3,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Системы линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{7}$$

где a_{ij}, b_i — произвольные числа ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$), которые называются соответственно *коэффициентами при неизвестных* x_j и *свободными членами* уравнений (7).

Индекс i у коэффициентов при неизвестных означает *номер уравнения*, индекс j — *номер неизвестного*.

Решением системы (7) называется такой набор ($\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$) чисел $\gamma_j (j = \overline{1, n})$, при подстановке которых вместо независимых x_j каждое уравнение системы превращается в тождество.

Система уравнений (7) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет решений, она называется *несовместной.*

Матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных, называют *матрицей системы.*

Рассматривают также *расширенную матрицу*, т. е. матрицу, полученную из матрицы системы присоединением к ней справа столбца свободных членов.

Теорема Кронекера-Капелли. *Система* (7) *линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

Методы решения системы линейных уравнений

1. Правило Крамера. Оно применяется в случае, когда $m = n$ и когда определитель матрицы системы отличен от нуля.

Теорема. *Если определитель матрицы системы отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{8}$$

где Δ — *определитель матрицы системы, а* $\Delta_j\,(j = \overline{1,n})$ — *вспомогательные определители, полученные из* Δ *заменой j-го столбца столбцом свободных членов.*

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 = -2. \end{cases}$

Решение. Находим определитель Δ данной системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10 \neq 0.$ Система совместна. Имеем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 6 = -10,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 8 = -10.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{-10}{-10} = 1,\ x_2 = \dfrac{-10}{-10} = 1.$

Ответ: $\{(1;1)\}$.

2. Метод обратной матрицы. Он также применяется в случае, когда $m = n$ и $\Delta \neq 0$. Систему

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases} \tag{9}
$$

можно записать в матричном виде $A \cdot X = B$, где

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.
$$

Умножив обе части уравнения слева на A^{-1}, получим

$$
X = A^{-1} \cdot B. \tag{10}
$$

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 = -2. \end{cases}$

Решение. Из решения рассмотренного ранее примера,

$$
A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Тогда по формуле (10) получим: $X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} =$

$$
= -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) \\ -2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Ответ: $\{(1;1)\}$.

3. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных). Он применяется для решения системы (7) в произвольном случае.

Преобразования, аналогичные элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы системы (7), будем называть *эле-*

ментарными преобразованиями этой системы. К ним отнесем еще удаление из системы уравнений типа 0 = 0.

В случае совместности системы (7) она может быть приведена при помощи элементарных преобразований к виду

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r\,. \end{cases} \tag{11}$$

Очевидно, число r равно рангу матрицы системы (который в случае совместности системы совпадает с рангом расширенной матрицы). Это число называется *рангом системы.* Очевидно, что $r \leq n$.

Если $r = n$, тогда система имеет *единственное решение.*

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 = -2. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения системы вычитаем первое, умноженное на 2. Получаем $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ -10x_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: $\{(1;1)\}$.

Если $r < n$, то система (7) в этом случае имеет *бесконечное множество решений.*

Систему (11) запишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r = -a'_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n + b'_1, \\ \qquad x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r = -a'_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n + b'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_r = -a'_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n + b'_r. \end{cases} \tag{12}$$

Неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ присваиваются любые значения, и поэтому они называются *свободными*. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются *базисными*. Двигаясь снизу вверх, находим значения всех неизвестных $x_i, i = \overline{1, n}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется n-мерным арифметическим пространством?
2. Что называется скалярным произведением двух векторов?
3. Какие системы векторов называются линейно независимыми?
4. Что называется базисом пространства R^n?
5. Что называется матрицей? Как определяются действия над матрицами?
6. Каково правило вычисления определителей второго и третьего порядков?
7. Как вводится понятие определителя в общем случае?
8. Как вводятся минор и алгебраические дополнения к элементу a_{ij}?
9. Какая матрица называется обратной по отношению к данной? Всегда ли к данной матрице существует обратная?
10. Каково правило нахождения обратной матрицы?
11. Как найти ранг матрицы?
12. Какая система линейных уравнений называется совместной? Каковы необходимое и достаточное условия совместности системы?
13. Какие существуют методы решения системы линейных уравнений? В чем их суть?
14. В каком случае система линейных уравнений имеет единственное решение, бесконечное множество решений?

Типовая задача 3

Даны векторы $\overline{a}$ = (2;–1;3), $\overline{b}$ = (1;2;–3), $\overline{c} = (0;1;2)$, $\overline{d}$ = (–1;9;–13) со своими координатами в базисе $\overline{\ell_1}, \overline{\ell_2}, \overline{\ell_3}$. Показать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ сами образуют базис, и найти разложение вектора $\overline{d}$ в новом базисе.

Решение. Вычисляем определитель, составленный из координат этих векторов: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 3 - 0 + 6 + 2 = 19 \neq 0$.

По теореме 1, сформулированной выше, векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис пространства R^3.

Пусть $\overline{d} = \alpha_1 \overline{a} + \alpha_2 \overline{b} + \alpha_3 \overline{c}$ — разложение вектора $\overline{d}$ по базису $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

По условию задачи имеем:

$-1\cdot\overline{\ell_1} + 9\cdot\overline{\ell_2} - 13\cdot\overline{\ell_3} = \alpha_1\cdot(2\cdot\overline{\ell_1} - 1\cdot\overline{\ell_2} + 3\cdot\overline{\ell_3}) +$
$+\ \alpha_2\cdot(1\cdot\overline{\ell_1} + 2\cdot\overline{\ell_2} - 3\cdot\overline{\ell_3}) + \alpha_3\cdot(0\cdot\overline{\ell_1} + 1\cdot\overline{\ell_2} + 2\cdot\overline{\ell_3}),$

$-1\cdot\overline{\ell_1} + 9\cdot\overline{\ell_2} - 13\cdot\overline{\ell_3} = (2\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3)\cdot\overline{\ell_1} +$
$+ (-1\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3)\cdot\overline{\ell_2} + (3\cdot\alpha_1 - 3\cdot\alpha_2 + 2\cdot\alpha_3)\cdot\overline{\ell_3}.$

Из условия равенства двух векторов получим:

$$\begin{cases} 2\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = -1, \\ -1\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + 1\cdot\alpha_3 = 9, \\ 3\cdot\alpha_1 - 3\cdot\alpha_2 + 2\cdot\alpha_3 = -13 \end{cases} \overset{[1]}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha_1 - 2\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 = -9, \\ 2\cdot\alpha_1 + 1\cdot\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = -1, \\ 3\cdot\alpha_1 - 3\cdot\alpha_2 + 2\cdot\alpha_3 = -13 \end{cases} \overset{[2]}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 = -9, \\ 5\cdot\alpha_2 + 2\cdot\alpha_3 = 17, \\ 3\cdot\alpha_2 + 5\cdot\alpha_3 = 14 \end{cases} \overset{[3]}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha_1 - 2\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 = -9, \\ \alpha_2 + \dfrac{2}{5}\cdot\alpha_3 = \dfrac{17}{5}, \\ 3\cdot\alpha_2 + 5\cdot\alpha_3 = 14 \end{cases} \overset{[4]}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = -2, \\ \alpha_2 = 3, \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

[1]: Обе части второго уравнения умножим на (–1). Поменяем местами первое и второе уравнения.

[2]: Обе части первого уравнения умножим на (–2) и прибавим соответственно ко второму уравнению. Затем обе части первого уравнения умножим на (–3) и прибавим соответственно к третьему уравнению.

[3]: Обе части второго уравнения разделим на 5.

[4]: Обе части второго уравнения умножим на (–3) и прибавим соответственно к третьему уравнению. Из третьего уравнения системы $\alpha_3 = 1$. Подставим это значение во второе уравнение и получим $\alpha_2 = 3$. Подставляя полученные значения $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$ в первое уравнение, найдем $\alpha_1 = -2$.

Итак, $\overline{d} = -2\overline{a} + 3\overline{b} + 1\overline{c}$.

Ответ: $\overline{d} = -2\overline{a} + 3\overline{b} + 1\overline{c}$.

Типовая задача 4

Исследовать на совместность и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

Решение. Находим ранги матрицы системы и расширенной матрицы:

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -7 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{[1]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{[2]}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 14 & -7 & -7 \\ 0 & -11 & 22 & -11 & -11 \end{array}\right) \overset{[3]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{[4]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -7 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

[1]: Меняем местами первую и вторую строки.

[2]: Элементы первой строки умножим на (–2) и прибавим соответственно к элементам второй строки. Затем элементы первой строки умножим на (–3) и прибавим соответственно к элементам третьей строки.

[3]: Элементы первой строки разделим на (–7), а элементы второй строки — на (–11).

[4]: Из элементов второй строки вычтем элементы третьей строки.

Итак, $r_A = r_{A|B} = 2 = r$.

По теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Так как $r = 2 < n = 4$, то система имеет бесконечное множество решений.

При помощи элементарных преобразований над уравнениями системы, аналогичных приведенным элементарным преобразованиям над строками матрицы, данная система приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Перенеся члены со свободными неизвестными в правые части системы, получим: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7x_3 - 4x_4 + 3, \\ x_2 = 2x_3 - x_4 + 1. \end{cases}$

Давая свободным неизвестным x_3, x_4 произвольные значения t_1, t_2,

получим *общее решение системы*: $\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2, \\ x_2 = 2t_1 - t_2 + 1, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2, \qquad t_1, t_2 \in R. \end{cases}$

Ответ: $\{(t_1 - t_2; 2t_1 - t_2 + 1; t_1; t_2) | t_1, t_2 \in R\}$.

3. Задание 5
по теме «Теория пределов»

Краткие теоретические сведения

Числовая последовательность

Если каждому натуральному n из множества натуральных чисел по некоторому правилу поставить в соответствие действительное число x_n, то множество пронумерованных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

называется *числовой последовательностью*.

При этом числа x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$) называются *членами последовательности*, символ x_n — *общим членом*, а число n является его *номером*.

Например, общий член x_n задается некоторой формулой $x_n = n^2$. Полагая поочередно $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим числовую последовательность 1, 4, 9, … .

Предел и непрерывность функции

Пусть X и Y — некоторые множества, и пусть каждому $x \in X$ поставлен в соответствие по определенному правилу f единственный элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что на множестве X задана *функция одной переменной* со значениями в множестве Y. Обозначение: $y = f(x)$. В этом случае X — область определения функции. Обозначение: $D(f)$.

Всякий интервал, содержащий точку x_0, называется *окрестностью* точки x_0.

Пусть $\varepsilon > 0$. Интервал $(x_0 - \varepsilon\,;\ x_0 + \varepsilon)$ называется ε*-окрестностью точки* x_0.

Определение предела функции по Коши. Пусть функция $y = f(x)$ определена в ε-окрестности точки x_0 за исключением, быть может, точки x_0. Тогда, если для любого $\varepsilon > 0$, сколь угодно малым бы оно ни было, существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$, то число B называется *пределом функции в точке* x_0. Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$.

Число B называется *пределом функции* $f(x)$ *в бесконечности*, если для любого даже сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = B$.

Если для всех $x \in D(f)$, $x > 0$ и $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = B$. Если для всех $x \in D(f)$, $x < 0$ и $-x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = B$.

Рассмотрим $x \in D(f)$, $x < x_0$ ($x > x_0$). Если существует предел функции при x, стремящемся к x_0, то он называется *левым* (*правым*) *пределом функции в точке* x_0. Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = B$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B\right)$.

Факт существования в точке x_0 предела функции $y = f(x)$ равносилен факту существования в этой точке равных между собой односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение Δy функции (рис. 10).

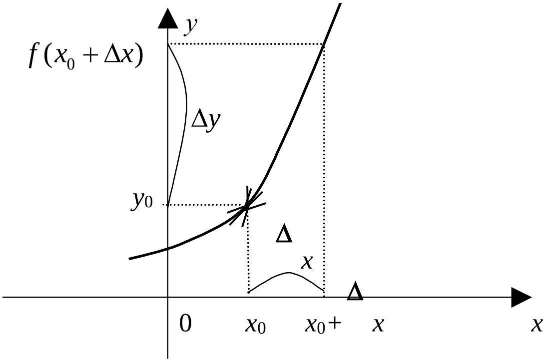

Рис. 10

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва функции.*

Элементарные функции

Основными элементарными функциями называют следующие функции:

1. Постоянную функцию $y = c$, c — *const*.
2. Степенную функцию $y = x^{\alpha}$, α — любое действительное число.
3. Показательную функцию $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$.
4. Логарифмическую функцию $y = \log_a x \, (0 < a \neq 1)$.
5. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$.
6. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Функцию, аналитическое выражение которой можно получить при помощи конечного числа арифметических операций над основными элементарными функциями, а также при помощи операции взятия функции от функции, назовем *элементарной функцией*.

Пример.

Функции $f(x) = arcsin(\log_5(x^2 + 1))$, $f(x) = \sqrt[3]{arctg^3(x^3+2x)+9^x}$, $f(x) = e^{\sqrt{sin^2 x+5x}}$ являются элементарными.

Областью определения $D(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество значений аргумента x, для каждого из которых существует вполне определенное числовое значение функции.

Теорема. *Если* $x \in D(y)$ *элементарной функции* $y = f(x)$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Например, $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + \sqrt{x+1}) = 3^2 + \sqrt{3+1} = 11$.

Теоремы о пределах

1. *Функция* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *не может иметь более одного предела.*

2. *Предел постоянной величины равен самой этой величине, т. е.* $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

3. *Пусть* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ — *функции, для которых существуют пределы при* $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = B$.

Тогда:

3.1. *Существует и предел алгебраической суммы этих функций, причем предел этой алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \mathrm{A} \pm \mathrm{B}.$$

3.2. *Существует и предел произведения этих функций, причем предел этого произведения равен произведению этих пределов:*

$$\lim_{x \to x_0}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}.$$

3.3. *Если* $B \neq 0$, *то существует и предел частного этих функций, причем предел этого частного равен частному пределов, т. е.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)} = \frac{A}{B}.$$

Формулировка для случая, когда $x \to \infty$, аналогична.

Функция $g(x)$ называется *бесконечно малой функцией* при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), если

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad (\lim_{x \to \infty} g(x) = 0).$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой функцией* при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), если для любого $P > 0$ найдется положительное число $\delta = \delta(P)$, что для всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$ ($|x| > \delta$), выполняется неравенство $|f(x)| > P$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).

Если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$ и $f(x)$ принимает только положительные (отрицательные) значения, то пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty).$$

Теорема (о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями)

Если $g(x)$ *— бесконечно малая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$), *то* $\dfrac{1}{g(x)}$ *— бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Если $f(x)$ *— бесконечно большая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$), *то* $\dfrac{1}{f(x)}$ *— бесконечно малая функция при* $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Замечательные пределы

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\ nx}{nx}=1$ — *первый замечательный предел.*

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}$ — *второй замечательный предел* ($e\approx 2{,}7$).

Вычисление пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=C$ (2)

Для вычисления пределов вида (2) вычисляем пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$. Могут встретиться следующие ситуации:

1. Если A, B — конечные числа, тогда $C = A^B$.

2. Если $A = 1$, $B = \infty$, тогда для вычисления предела (2) применяют второй замечательный предел.

Во всех остальных случаях задачу вычисления предела (2) решают непосредственно.

Эквивалентные бесконечно малые величины

Величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ называются *эквивалентными бесконечно малыми величинами*, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Обозначение эквивалентности: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Примеры эквивалентных бесконечно малых величин:

$sin\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$arcsin\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$,

$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$,

$(1+\alpha(x))^{a}-1\sim a\cdot\alpha(x)$.

Эквивалентные бесконечно малые величины применяются для вычисления пределов. Бесконечно малая величина $\alpha(x)$ при вычислении предела в точке x_0 может быть заменена на эквивалентную ей бесконечно малую величину.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,5x}{arctg2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое числовая последовательность?
2. Дайте определение предела функции. Может ли функция в точке иметь два предела?
3. Какая функция называется элементарной? Каким замечательным свойством она обладает?
4. Какие вы знаете свойства пределов?
5. Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой функций. Какая между ними существует связь?
6. Сформулируйте первый и второй замечательные пределы.
7. Как вычислить предел вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$? Какие могут встретиться ситуации при его вычислении?
8. Какие две величины называются эквивалентными бесконечно малыми?
9. Перечислите основные эквивалентные бесконечно малые величины.
10. Каким образом применяются эквивалентные бесконечно малые величины при вычислении пределов? Приведите примеры.

Типовая задача 5

Вычислить пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-9}$ при а) $x_0=2$; б) $x_0=3$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos2x}{x\cdot sin\,x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}(5+4x)^{\frac{1}{x+1}}$.

Решение. 1а) Функция $f(x)=\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-9}$ является элементарной и определенной в точке $x_0 = 2$. По теореме о пределе для элементарной функции,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-21}{x^2-9}=\frac{2^2+4\cdot 2-21}{2^2-9}=\frac{9}{5}.$$

1б) Если применить теоремы о пределах сразу, то получим неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, поэтому преобразуем числитель и знаменатель функции:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x-21}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x-7)}{(x-3)\cdot(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+7}{x+3}=\frac{3+7}{3+3}=\frac{5}{3}.$$

1в) Применив теоремы о пределах сразу, получим неопределенность типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Поэтому для предварительного преобразования выражения функции разделим числитель и знаменатель на старшую степень переменной, т. е. на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-21}{x^2-9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{4x}{x^2}-\dfrac{21}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{9}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+4\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-21\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-9\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1+4\cdot 0-21\cdot 0}{1-9\cdot 0}=1.$$

2) Если будем применять теоремы о пределах сразу, то получим неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для преобразования функции умножим

числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x+5}+3$, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)\cdot(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)\cdot(\sqrt{x+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x+5}\right)^2-3^2}{(x-4)\cdot(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\cdot(\sqrt{x+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}.$$

3) Применив очевидные преобразования и первый замечательный предел, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,2x}{x\cdot sin\,x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2sin^2 x}{x\cdot sin\,x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin\ x}{x} = 2\cdot 1 = 2.$$

4) При применении теорем о пределах сразу, получаем неопределенность типа $[1^\infty]$. Применяя второй замечательный предел, получим:

$$\lim_{x\to -1}(5+4x)^{\frac{1}{x+1}} = [1^\infty] = \lim_{x\to -1}(1+4\cdot(x+1))^{\frac{1}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\left((1+4\cdot(x+1))^{\frac{1}{4\cdot(x+1)}}\right)^4 = e^4.$$

Ответ: 1а) $\frac{9}{5}$; 1б) $\frac{5}{3}$; 1в) 1; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 2; 4) e^4.

4. Задания 6 и 7 по теме «Производная и ее применение для исследования функций»

Краткие теоретические сведения

Понятие производной

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Производная функции $y = f(x)$ обозначается через y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Процесс нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*.

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если она в этой точке имеет конечную производную.

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *то она непрерывна в этой точке*.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Геометрический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что производная в точке x_0 $f'(x_0)$ равна тангенсу угла α наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 11).

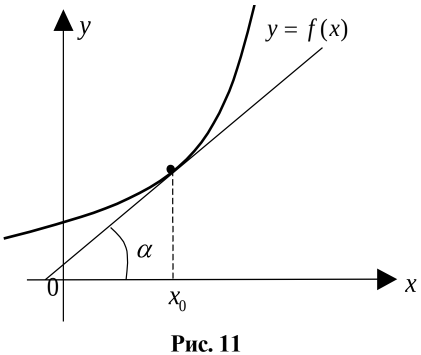

Рис. 11

В экономике существует несколько интерпретаций производной. Среди них можно упомянуть следующие:

1. Предельный доход определяется как производная от суммарного дохода R по количеству товара Q.

2. Предельные издержки определяются как производная издержек производства R по количеству товара Q.

Таким же образом определяются предельная выручка, предельный продукт и другие предельные величины, характеризующие не состояния, а процесс изменения какого-либо экономического показателя.

Правила вычисления производных:

1. Производная постоянной функции равна нулю, т. е. $c' = 0$.

2. Производная независимого аргумента x равна 1, т. е. $x' = 1$.

3. Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна соответствующей алгебраической сумме производных функций-слагаемых, т. е. $(u+v-w)' = u'+v'-w'$.

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций u и v вычисляется по формуле $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак производной, т. е. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.

5. Производная частного дифференцируемых функций u и v вычисляется по формуле $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Производная сложной функции

Если переменная y — функция от переменной u, т. е. $y = f(u)$, а переменная $u = \varphi(x)$ — функция от переменной x, то говорят, что *задана сложная функция* $y = f(\varphi(x))$.

Теорема. *Если функции $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ дифференцируемы, то производная сложной функции существует и может быть вычислена по формуле* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Таблица производных

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, $(n \in R)$.

2. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

4. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

6. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}\ (a > 0, a \neq 1)$.

7. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

10. $(tg\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

11. $(ctg\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

12. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

13. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

14. $(arctg\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

15. $(arcctg\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке x_0, т. е. $dy = A \cdot \Delta x$.

Число A равно производной функции $y = f(x)$ в точке x_0, т. е.

$A = f'(x_0)$.

Дифференциал dy функции в произвольной точке x равен произведению $f'(x)$ на дифференциал dx переменной x, т. е.

$dy = f'(x)dx$.

Правило Лопиталя

Теорема. *Пусть функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0*, за исключением, быть может, самой точки* x_0*. Кроме того, пусть также* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = 0$ *или* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \infty$*, причем* $f_2'(x) \neq 0$ *в указанной окрестности точки* x_0.

Тогда, если существует предел отношения $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ (*конечный или бесконечный*), *существует и предел* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$*, причем справедлива формула* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

Замечание 1. При необходимости правило Лопиталя может быть применено два и более раз.

Замечание 2. Теорема остается верной и в случае, когда $x \to \infty$ ($x \to \pm\infty$).

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

Схема исследования функции

При исследовании функций и построении графиков рекомендуется использовать нижеприведенную схему.

1. Указать область определения функции $D(y)$.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность.

Функция $y = f(x)$ с симметричной относительно начала координат областью определения $D(y)$ называется *четной*, если для всех $x \in D(y)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно начала координат.

3. Провести исследование функции на периодичность.

Если функция периодическая, то дальнейшее исследование можно проводить на интервале, длина которого равна периоду.

4. Исследовать поведение функции на границе области определения, найти односторонние пределы в точках разрыва. Найти асимптоты.

Прямая ℓ называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки M графика функции до прямой ℓ стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику функции от начала координат. Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты.

Пусть x_0 — точка разрыва функции. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних ее пределов в точке x_0 равен $+\infty$ (или $-\infty$).

Если существуют и конечны $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=b$, то прямая $y = k\cdot x+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Горизонтальная асимптота — это частный случай наклонной при $k = 0$.

5. Найти производную y'.

6. Найти критические точки функции, т. е. те значения аргумента x, которые принадлежат $D(y)$ и в которых производная y' равна нулю или ее не существует.

7. Найти интервалы монотонности и точки локальных экстремумов.

Теорема 1. *Если дифференцируемая функция* $y = f(x)$, $x\in(a,b)$ *возрастает* (*убывает*) *на интервале* (a,b), *то* $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) *для любого* $x\in(a,b)$.

Теорема 2. *Если функция* $y = f(x)$, $x\in(a,b)$ *имеет положительную* (*отрицательную*) *производную в каждой точке интервала* (a,b), *то эта функция возрастает* (*убывает*) *на интервале* (a,b).

Точка x_0, принадлежащая $D(y)$, называется *точкой локального минимума* (*максимума*) функции $y = f(x)$, если найдется такая δ - окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ $((x_0'-\delta;x_0'+\delta))$ точки x_0 (x'_0), что для всех $x\neq x_0$ $(x\neq x'_0)$ из этой окрестности (рис. 12) выполняется неравенство

$f(x)>f(x_0)$ $(f(x)<f(x_0'))$.

Точки локальных минимума и максимума называются *точками локального экстремума,* а значения функции в этих точках называются *локальными экстремумами функции.*

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в критической точке x_0 и в некоторой δ-окрестности имеет конечную производную, кроме, быть может, самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 является точкой локального максимума, если же $f'(x)$ при переходе через x_0 меняет знак с минуса на плюс, то она является точкой локального минимума.*

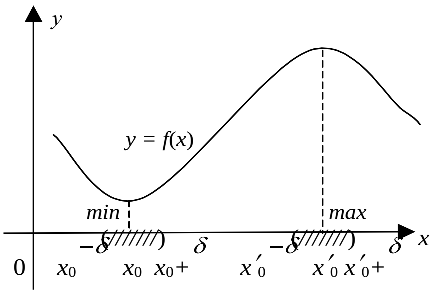

Рис. 12

8. Найти вторую производную y'', т. е. производную от первой производной y'.

9. Определить интервалы выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба.

График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a,b) *выпуклость* (*вогнутость*), если он расположен ниже (выше) любой касательной, проведенной к нему в любой точке из (a,b) (рис. 13).

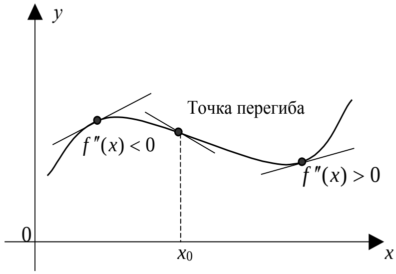

Рис. 13

Точка графика функции из $D(y)$, в которой выпуклость сменяется вогнутостью (или наоборот), называется *точкой перегиба*.

Теорема. *Если во всех точках интервала* (a,b) *функция* $y = f(x)$ *имеет отрицательную* (*положительную*) *вторую производную* y'', *то график этой функции на интервале* (a,b) *является выпуклым* (*вогнутым*). *Если вторая производная* y'' *при переходе через точку* x_0, *в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой* x_0 *— точка перегиба*.

10. Найти точки пересечения графика с осями координат, интервалы знакопостоянства фукции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$), контрольные точки.

11. Построить график функции с учетом проведенного исследования.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение производной. Каков ее геометрический смысл?
2. Какие вы знаете экономические интерпретации производной функции? Приведите примеры.
3. Пусть функция $y = f(x)$ является в некоторой точке дифференцируемой. Следует ли отсюда, что она является непрерывной в этой точке?
4. Сформулируйте общие правила дифференцирования функций и формулы нахождения производных основных элементарных функций.
5. Что называется дифференциалом функции? По какой формуле он вычисляется?

6. Для раскрытия каких неопределенностей может быть использовано правило Лопиталя? Приведите примеры.

7. Как определяются асимптоты кривой? Каким образом они находятся?

8. Какие вы знаете признаки возрастания и убывания функции? Покажите, что функция $y = ln\ x$ возрастает, а функция $y = cos\ x - 2x$ убывает при всех $x \in D(y)$.

9. Что называется экстремумом функции? Сформулируйте достаточное условие его существования.

10. Дайте определение выпуклости, вогнутости графика функции на интервале. Сформулируйте достаточные условия существования этих свойств у графика.

11. Какая точка называется точкой перегиба графика функции? Какое вы знаете достаточное условие существования перегиба в точке?

12. Какова схема исследования функции и построения ее графика?

Типовая задача 6

Найти производные следующих функций:

1) $y = (\ln^2 x + 5x)^{10}$;

2) $y = (5^{cos3x} + x) \cdot tg3x$;

3) $y = \dfrac{e^{x^3} - cos4x}{x^2 + 5}$.

Решение. Используя формулы и правила дифференцирования, находим производные данной функции следующим образом:

1) $y' = ((\ln^2 x + 5x)^{10})' = 10 \cdot (\ln^2 x + 5x)^9 \cdot (\ln^2 x + 5x)' = 10 \cdot (\ln^2 x +$
$+ 5x)^9 \cdot \left(2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} + 5\right) = 10 \cdot (\ln^2 x + 5x)^9 \cdot \left(\dfrac{2\ln x}{x} + 5\right)$.

2) $y' = ((5^{cos3x} + x) \cdot tg3x)' = (5^{cos3x} + x)' \cdot tg3x + (5^{cos3x} + x) \cdot (tg3x)' =$
$= (5^{cos3x} \cdot \ln5 \cdot (cos3x)' + 1) \cdot tg3x + (5^{cos3x} + x) \cdot \dfrac{1}{cos^2 3x} \cdot 3 = (-5^{cos3x} \cdot$
$\ln5 \cdot \cdot sin3x \cdot 3 + 1) \cdot tg3x + (5^{cos3x} + x) \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x} = (-3 \cdot \ln5 \cdot 5^{cos3x} \cdot sin3x$

+

$$+ 1) \cdot tg3x + \frac{3 \cdot (5^{cos3x} + x)}{cos^2 3x}.$$

3) $$y' = \left(\frac{e^{x^3} - cos4x}{x^2 + 5} \right)' =$$

$$= \frac{(e^{x^3} - cos4x)' \cdot (x^2+5) - (x^2+5)' \cdot (e^{x^3} - cos4x)}{(x^2+5)^2} =$$

$$= \frac{(e^{x^3} \cdot 3x^2 + sin4x \cdot 4) \cdot (x^2+5) - 2x \cdot (e^{x^3} - cos4x)}{(x^2+5)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2 e^{x^3} + 4sin4x) \cdot (x^2+5) - 2x \cdot (e^{x^3} - cos4x)}{(x^2+5)^2}.$$

Ответ: 1) $10 \cdot (\ln^2 x + 5x)^9 \cdot \left(\frac{2\ln x}{x} + 5 \right)$;

2) $(-3 \cdot \ln 5 \cdot 5^{cos3x} \cdot sin3x + 1) \cdot tg3x + \frac{3 \cdot (5^{cos3x} + x)}{cos^2 3x}$;

3) $\frac{(3x^2 e^{x^3} + 4sin4x) \cdot (x^2+5) - 2x \cdot (e^{x^3} - cos4x)}{(x^2+5)^2}$.

Типовая задача 7

Исследовать функцию $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Так как функция не определена при $x + 1 \neq 0$ ($x \neq -1$), то $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;\infty)$.

2. Функция является ни четной, ни нечетной, так как $D(y)$ не является симметричной относительно начала координат.

3. Функция является непериодической.

4. Находим асимптоты.

$x = -1$ — точка разрыва. Если x будет стремиться к (-1) слева, оставаясь меньше (-1), то $(x + 1)^2$ — положительная бесконечно малая функция, а $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ — положительная бесконечно большая функция, т. е. если $x \to -1-0$, то $(x+1)^2 \to +0$, а $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \to +\infty$, или $\lim\limits_{x \to -1-0} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = +\infty$.

Аналогично показывается, что $\lim\limits_{x \to -1+0} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = +\infty$.

Делаем вывод, что прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота графика.

Для нахождения наклонных асимптот $y = k \cdot x + b$ при $x \to \pm\infty$ находим пределы:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2 \cdot x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 2x + 1) \cdot x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Таким образом, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика.

Аналогичным образом показывается, что $y = 1$ — горизонтальная асимптота и при $x \to -\infty$.

5. $y' = \left(\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \right)' = \dfrac{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)^2 - 2\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2}{(x+1)^4} =$

$$= \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x+1) - 2\cdot(x-1)^2}{(x+1)^3} = \frac{2x^2 - 2 - 2x^2 + 4x - 2}{(x+1)^3} = \frac{4x-4}{(x+1)^3}.$$

6. Находим критические точки. Решаем уравнение $y' = 0$:

$$\frac{4x-4}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x-4=0, \\ (x+1)^3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Точка $x = -1$, в которой производная не существует, не принадлежит $D(y)$. Точка $x = 1 \in D(y)$. Поэтому $x = 1$ — единственная критическая точка.

7. Критическая точка $x = 1$ разбивает область определения на интервалы. Определим знак первой производной y' на каждом интервале (рис. 14).

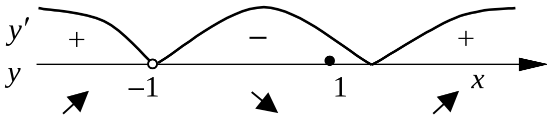

Рис. 14

$$y(1) = \frac{(1-1)^2}{(1+1)^2} = \frac{0}{4} = 0.$$

Составим следующую таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
y'	+	Не существует	–	0	+
y	Возрастает	Не существует	Убывает	0	Возрастает
		Экстремума нет		min	

8. $y'' = (y')' = \left(\dfrac{4x-4}{(x+1)^3}\right)' = \dfrac{(4x-4)' \cdot (x+1)^3 - ((x+1)^3)' \cdot (4x-4)}{(x+1)^6} =$

$$= \frac{4 \cdot (x+1)^3 - 3 \cdot (x+1)^2 \cdot (4x-4)}{(x+1)^6} = \frac{4 \cdot (x+1) - 3 \cdot (4x-4)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{4x + 4 - 12x + 12}{(x+1)^4} = \frac{-8x+16}{(x+1)^4}.$$

9. Решим уравнение $y'' = 0$: $\dfrac{-8x+16}{(x+1)^4} = 0.$

Отсюда $\begin{cases} -8x + 16 = 0, \\ (x+1)^4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$

Точка $x = -1$, в которой вторая производная не существует, не принадлежит $D(y)$. Точка $x = 2 \in D(y)$. Определим знак второй производной на области определения (рис. 15).

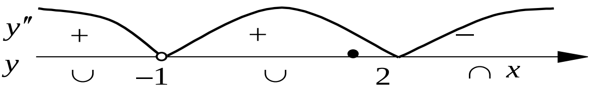

Рис. 15

$$y(2) = \frac{(2-1)^2}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}.$$

Составим следующую таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; \infty)$
y''	+	Не существует	+	0	–
y	$\cup$	Не существует	$\cup$	1/9	$\cap$
	График вогнутый	Перегиба нет	График вогнутый	Точка перегиба	График выпуклый

10. Находим точки пересечения графика с осями координат.

10.1. С осью Ox. Так как $y = 0$, то имеем

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2=0,\\ (x+1)^2\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1,\\ x\neq -1\end{cases} \Rightarrow x=1.$$

10.2. С осью Oy. Так как $x = 0$, то имеем $y = \dfrac{(0-1)^2}{(0+1)^2}=1$.

Значит, (1,0), (0,1) — точки пересечения с осями координат.

Так как числитель и знаменатель дроби $\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ являются полными квадратами, то $y \geq 0$ при всех $x \in D(y)$.

11. По результатам исследования строим график функции (рис. 16).

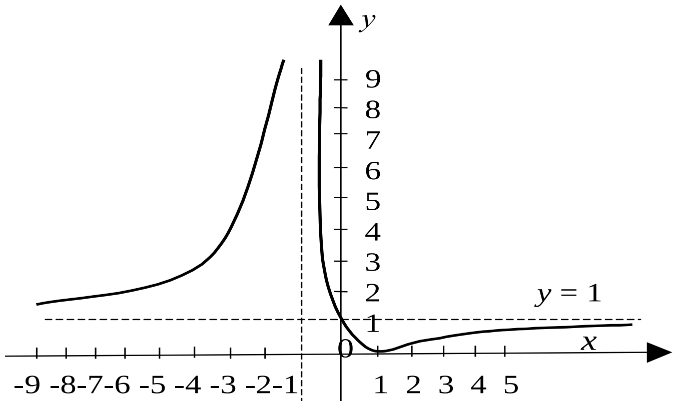

Рис. 16

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

1. Задание 1 по теме «Частные производные функции нескольких переменных»

Краткие теоретические сведения

Понятие функции нескольких переменных

Пусть имеется n переменных величин и каждому набору их значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из некоторого множества X соответствует одно вполне определенное значение переменной величины z. Тогда говорят, что *задана функция нескольких переменных* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример. Формула $z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ задает объем прямоугольного параллелепипеда как функцию трех его измерений x_1, x_2, x_3.

Пример. В экономической теории часто используется так называемая *функция полезности*, ставящая в соответствие каждому набору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который интерпретировался выше как набор товаров в соответствующих единицах измерения, функцию $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающую полезность от этих приобретенных n товаров. Чаще всего используются следующие виды функции f:

1. Логарифмическая функция

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i),$$

где $a_i > 0,\ x_i > c_i \ge 0.$

2. Функция постоянной эластичности

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i},$$

где $a_i > 0,\ 0 < b_i < 1,\ x_i > c_i \ge 0.$

Функция двух переменных и ее график

Будем рассматривать в дальнейшем случай $n = 2$ и функцию $z = f(x, y)$ двух переменных x, y.

Для ее изучения используется развитый математический аппарат для функции одной переменной. Любой функции $z = f(x, y)$ можно поставить в соответствие пару функций одной переменной, т. е. при фиксированном значении $x = x_0$ — функцию $z = f(x_0, y)$ и при фиксированном значении $y = y_0$ — функцию $z = f(x, y_0)$.

Графиком функции $z = f(x, y)$ называется множество точек пространства R^3, в которых координата z связана с координатами x и y уравнением $z = f(x, y)$.

В общем случае, *график функции* $z = f(x, y)$ — некоторая поверхность в R^3 (рис. 17).

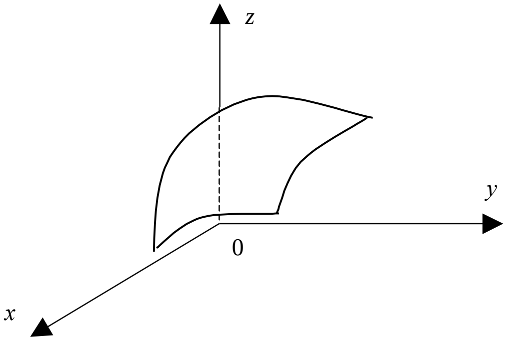

Рис. 17

Частные производные первого порядка

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

а *частной производной* этой функции по независимой переменной y называется конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = f'_y(x, y).$$

Обозначается частная производная так: $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, или z'_x, z'_y, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Для частных производных функции нескольких переменных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Полный дифференциал

Полным приращением функции $z = f(x,y)$ *в точке* $M(x,y)$ называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$, где Δx, Δy — произвольные приращения аргументов.

Функция $z = f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* (x,y), если ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где A и B, не зависящие от Δx и Δy, — постоянные; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ функции, равные нулю при $\Delta x = \Delta y = 0$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов $\Delta x, \Delta y$, т. е. $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$.

Для независимых переменных x, y полагают, что $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Поэтому *полный дифференциал функции* $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Пример. Для функции $z = x^2 y$ получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 y)'_x = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 y)'_y = x^2, \quad dz = 2xy\,dx + x^2 dy.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что вы понимаете под функцией нескольких переменных?
2. Какие вы знаете примеры функций нескольких переменных?
3. Что называется частной производной функции двух переменных?
4. Как вычислить полное приращение функции $z = f(x, y)$ в произвольной точке?
5. Какая функция называется дифференцируемой в точке (x, y)?
6. Что называется полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$?
7. По какой формуле вычисляется полный дифференциал функции двух переменных?

Типовая задача 1

Показать, что функция $u = y \cdot \ln(x^2 - y^2)$ удовлетворяет соотношению $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y \cdot \ln(x^2 - y^2))'_x = y \cdot (\ln(x^2 - y^2))'_x = y \cdot \frac{2x}{x^2 - y^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (y \cdot \ln(x^2 - y^2))'_y = y'_y \cdot \ln(x^2 - y^2) + y \cdot (\ln(x^2 - y^2))'_y = \ln(x^2 -$$

$$- y^2) + y \cdot \frac{-2y}{x^2 - y^2} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Подставляем полученные значения в соотношение:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \cdot \left(\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \right) = \frac{2y}{x^2 - y^2} +$$

$$+ \frac{1}{y} \cdot \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{y} \cdot \ln(x^2 - y^2) = \frac{y \cdot \ln(x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{u}{y^2},$$

что и требовалось показать.

2. Задания 2 и 3 по теме «Неопределенный интеграл, определенный интеграл и его применение для вычисления площади фигуры»

Краткие теоретические сведения

Понятие неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для любого элемента $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X, то всякую другую первообразную $\Phi(x)$ на промежутке X можно представить в виде $\Phi(x) = F(x) + c$, где c — постоянная величина.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных, т. е. $\int f(x)dx = F(x) + c$.

При этом $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, $\int$ — знак неопределенного интеграла, x — переменная интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием этой функции.*

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + c$.
4. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$, где c — постоянная величина.
5. $\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)\, dx$.
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + c$ и $u = \varphi(x)$ — дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + c$.

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int du = u + c$.
2. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$.
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c,\ u \neq 0$.
4. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + c = -\dfrac{1}{a} arcctg \dfrac{u}{a} + c,\ a \neq 0$.

5. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + c = -arccos\frac{u}{a} + c,\ a > 0$.

6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1.$

7. $\int e^u du = e^u + c.$

8. $\int sin\, u\, du = -cos\, u + c.$

9. $\int cos\, u\, du = sin\, u + c.$

10. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tg\, u + c,\ u \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n,\ n \in Z.$

11. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctg\, u + c,\ u \neq \pi \cdot n,\ n \in Z.$

12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c.$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c.$

14. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c.$

15. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{u}{a} + c.$

16. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c.$

Интегрирование методом замены переменной и по частям

Метод замены переменной проводится по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ — некоторая дифференцируемая функция.

Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые функции, то справедлива *формула интегрирования по частям*

$\int u dv = uv - \int v du.$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование проводят в зависимости от типа простейшей рациональной дроби.

1. $\dfrac{A}{x-a}$ (A, a — постоянные действительные числа) — простейшая рациональная дробь первого типа.

Пример. $\displaystyle\int \frac{4 \cdot dx}{x-5} = 4 \cdot \int \frac{dx}{x-5} = \begin{bmatrix} x-5=t, \\ x=t+5, \\ x' \cdot dx = (t+5)' dt, \\ dx = dt \end{bmatrix} = 4 \cdot \int \frac{dt}{t} =$

$= 4 \cdot \ln|t| + c = 4 \cdot \ln|x-5| + c$.

2. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ (A, a, m — постоянные числа, $A \in R, a \in R, m \in N$, $m \geq 2$) — простейшая рациональная дробь второго типа.

Пример. $\displaystyle\int \frac{6}{(x-7)^4} dx = \begin{bmatrix} x-7=t, \\ x=t+7, \\ x' \cdot dx = (t+7)' dt, \\ dx = dt \end{bmatrix} = 6 \cdot \int \frac{dt}{t^4} = 6 \cdot \int t^{-4} dt =$

$= 6 \cdot \dfrac{t^{-3}}{-3} + c = -2 \cdot \dfrac{1}{(x-7)^3} + c = -\dfrac{2}{(x-7)^3} + c$.

3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (M, N, p, q — постоянные числа, M, N, p, $q \in R$, x^2+px+q не имеет действительных корней) — простейшая рациональная дробь третьего типа.

Пример. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+4x+5} dx = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+4x+5} dx + 5 \cdot \int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$

$\displaystyle= \frac{3}{2} \cdot \int \frac{(2x+4)-4}{x^2+4x+5} dx + 5 \cdot \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot$

$$\cdot \int \frac{dx}{x^2+4x+5} + 5 \cdot \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \left[\begin{array}{c} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx = \\ = \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} dx = \\ = \ln\left|x^2+4x+5\right| + c \end{array} \right] =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \ln\left|x^2+4x+5\right| - \int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{3}{2} \cdot \ln\left|x^2+4x+5\right| - \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$$

$$= [d(x+2) = (x+2)'dx = dx] = \frac{3}{2} \cdot \ln\left|x^2+4x+5\right| - \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \frac{3}{2} \cdot$$

$$\cdot \ln\left|x^2+4x+5\right| - arctg(x+2) + c.$$

4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ (M, N, p, q — постоянные числа, $M, N, p, q \in R$, $m \in N$, $m \geq 2$; $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней) — простейшая рациональная дробь четвертого типа.

Интеграл от этой дроби считается с помощью рекуррентных формул, позволяющих уменьшить число m до 1.

Интегрирование правильных и неправильных рациональных дробей

Рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{Q_n(x)}$ ($Q_n(x)$, $Q_m(x)$ — некоторые многочлены степеней n и m соответственно) называется *правильной*, если $m < n$, и *неправильной* в противном случае (если $m \geq n$).

Для интегрирования правильной дроби ее предварительно раскладывают на простейшие дроби. Для этого многочлен $Q_n(x)$ разлагают на неприводимые множители. Общий вид такого разложения следующий:

$$\frac{Q_m(x)}{(x-a_1)^k\cdot\ldots\cdot(x-b)^r\cdot(x^2+px+q)^s} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{A_k}{(x-a_1)^k}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_r}{(x-b)^r}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_r, M_1, M_2, \ldots, M_s, N_1, N_2, \ldots, N_s$ — некоторые неопределенные действительные коэффициенты, которые следует еще определить.

Интегрирование неправильной рациональной дроби сводят к интегрированию правильной рациональной дроби выделением из первой целой части.

Интегрирование некоторых иррациональных функций

Если $f(x) = R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, то для ее интегрирования применяют подстановку $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, где n = НОК ($n_1, \ldots, n_k$).

Пример. $\int\frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx = \left[\begin{array}{l}\sqrt[6]{x+1}=t, \text{так как НОК}\,(2;3)=6.\\ \text{Отсюда }\ x+1=t^6, x=t^6-1, dx=6\cdot t^5dt\end{array}\right] =$

$$= \int\frac{t^6-1+t^3}{t^2}\cdot 6\cdot t^5dt = 6\cdot\int(t^9-t^3+t^6)dt = 6\cdot\frac{t^{10}}{10} - 6\cdot\frac{t^4}{4} + 6\cdot\frac{t^7}{7}+c =$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^{10}-\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^4+\frac{6}{7}\cdot\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^7+c=\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}+$$

$$+\frac{6}{7}\cdot\sqrt[6]{(x+1)^7}+c.$$

Определенный интеграл и его основные свойства

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $y = f(x)$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. На каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i (i = 1, 2,…, n) и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ называется *интегральной суммой функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, а ее предел при $\max_i \Delta x_i \to 0$, если он существует и конечен, называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ в пределах от a до b и обозначается следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i .$$

В этом случае функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$.

Среди многих экономических интерпретаций определенного интеграла отметим следующую:

$\int_a^b f(t)dt$ равен объему производства от момента времени t при условии, что $f(t)$ — производительность труда в момент времени t.

Определенный интеграл имеет следующие свойства:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

2. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$.

3. $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot \int_a^b f(x)dx$.

Формула Ньютона-Лейбница и интегрирование по частям

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, то справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Замена переменной в определенном интеграле

Если $x=\varphi(t)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt .$$

Вычисление площадей плоских фигур при помощи определенного интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривыми (рис. 18) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \le f_2(x)$) и прямыми $x = a$, $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx .$$

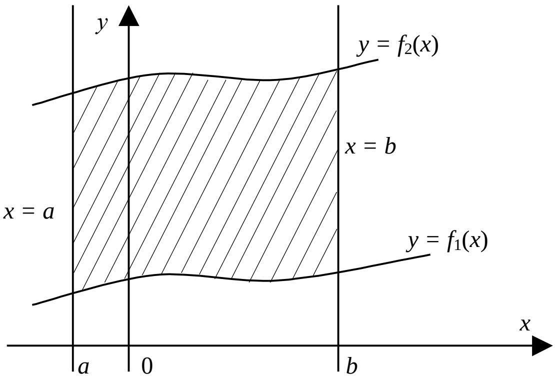

Рис. 18

Вопросы для самопроверки

1. Что называется первообразной для функции $y = f(x)$?
2. Что называется неопределенным интегралом от функции $y = f(x)$?
3. Какие свойства имеет неопределенный интеграл?
4. Какие методы интегрирования вы знаете?
5. Какие типы простейших рациональных дробей вы знаете? Как они интегрируются?
6. Каким образом находятся неопределенные интегралы от рациональных дробей?
7. Какой вы знаете метод интегрирования иррациональностей?
8. Что называется определенным интегралом?
9. Какие вы знаете свойства определенного интеграла?
10. Какую экономическую интерпретацию определенного интеграла вы знаете?
11. Каким образом применяется определенный интеграл для вычисления площадей плоских фигур?

Типовая задача 2

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int e^{x^4} \cdot x^3 dx$;

2) $\int x \cdot arctg 2x \, dx$;

3) $\int \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} dx$.

Результаты проверить дифференцированием.

Решение. 1) Так как $\int e^u du = e^u + c$, то, положив $u = x^4$, получим

$du = (x^4)' \cdot dx = 4x^3 dx$.

Отсюда $\int e^{x^4} \cdot x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot \int e^{x^4} \cdot 4x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot \int e^u du = \frac{1}{4} e^u + c =$

$= \frac{1}{4} e^{x^4} + c$.

Проверка: $\left(\frac{1}{4}e^{x^4}+c\right)' = \frac{1}{4}(e^{x^4})'+c' = \frac{1}{4}e^{x^4}\cdot(x^4)'+0 = \frac{1}{4}e^{x^4}\cdot 4x^3 =$
$= e^{x^4}\cdot x^3$.

2) Применим формулу интегрирования по частям:

$$u = arctg2x \Rightarrow du = \frac{2}{1+4x^2}dx, \quad dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}.$$

Тогда $\int x\cdot arctg2xdx = \frac{x^2}{2}\cdot arctg2x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1+4x^2}dx = \frac{x^2}{2}\cdot arctg2x -$
$-\frac{1}{4}\cdot\int\frac{(1+4x^2)-1}{1+4x^2}dx = \frac{x^2}{2}\cdot arctg\,2x - \frac{1}{4}\cdot\int\left(1-\frac{1}{1+4x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\cdot arctg2x -$
$-\frac{1}{4}\cdot\int dx + \frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2}\cdot arctg2x - \frac{1}{4}\cdot x + \frac{1}{8}\cdot\int\frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \frac{x^2}{2}\cdot arctg2x -$
$-\frac{1}{4}\cdot x + \frac{1}{8}\cdot arctg2x + c$.

Проверка: $\left(\frac{x^2}{2}\cdot arctg2x - \frac{1}{4}\cdot x + \frac{1}{8}\cdot arctg2x + c\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\cdot arctg2x\right)' -$
$-\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)' + \left(\frac{1}{8}\cdot arctg2x\right)' + c' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot arctg2x + \frac{x^2}{2}\cdot(arctg2x)' - \frac{1}{4} +$
$+\frac{1}{8}\cdot(arctg2x)' + 0 = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot arctg2x + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{1+4x^2} =$
$= x\cdot arctg2x + \frac{x^2}{1+4x^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot(1+4x^2)} = x\cdot arctg2x + \frac{4x^2-1-4x^2+1}{4\cdot(1+4x^2)} =$
$= x\cdot arctg2x$.

3) Данная подынтегральная дробь неправильная, поэтому сначала выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^3-1 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} 2x^3-6x^2+4x & 2x+6 \\ \cline{1-1} -\,6x^2-4x-1 & \\ 6x^2-18x+12 & \\ \cline{1-1} 14x-13 & \end{array}$$

Итак, $\dfrac{2x^3-1}{x^2-3x+2}=2x+6+\dfrac{14x-13}{x^2-3x+2}$.

Отсюда $\int\dfrac{2x^3-1}{x^2-3x+2}dx=\int(2x+6)\,dx+\int\dfrac{14x-13}{x^2-3x+2}\,dx$ = [$x^2-3x+2=$ $=(x-1)\cdot(x-2)$] = $\int(2x+6)\,dx + \int\dfrac{14x-13}{(x-1)\cdot(x-2)}dx = I$.

Представим правильную дробь в виде суммы простейших:

$$\frac{14x-13}{(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A\cdot(x-2)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}=$$

$$=\frac{x\cdot(A+B)+(-2A-B)}{(x-1)\cdot(x-2)}.$$

Избавляясь от знаменателей, получим

$$14x-13=(A+B)\cdot x+(-2A-B).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при неизвестных в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений

$$\begin{cases}A+B=14,\\-2A-B=13.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1,\\B=15.\end{cases}$$

Тогда $\dfrac{14x-13}{(x-1)\cdot(x-2)}=-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{15}{x-2}$.

Итак, $I=x^2+6x+\int\left(-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{15}{x-2}\right)dx=x^2+6x-\int\dfrac{dx}{x-1}+15\cdot\int\dfrac{dx}{x-2}=$

$=x^2+6x-\int\dfrac{d(x-1)}{x-1}+15\cdot\int\dfrac{d(x-2)}{x-2}=x^2+6x-\ln|x-1|+15\ln|x-2|+c.$

Проверка: $(x^2+6x-\ln|x-1|+15\cdot\ln|x-2|+c)'=(x^2)'+(6x)'-$

$-(\ln|x-1|)'+(15\cdot\ln|x-2|)'+c'=2x+6-\dfrac{1}{x-1}\cdot(x-1)'+$

$+15\cdot\dfrac{1}{x-2}\cdot(x-2)'+0=2x+6-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{15}{x-2}=$

$$= \frac{(2x+6)\cdot(x-1)\cdot(x-2)-(x-2)+15\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)} =$$

$$= \frac{(2x^2-2x+6x-6)\cdot(x-2)-x+2+15x-15}{(x-1)\cdot(x-2)} =$$

$$= \frac{2x^3-4x^2+4x^2-8x-6x+12+14x-13}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{2x^3-1}{x^2-3x+2}.$$

Ответ: 1) $\frac{1}{4}e^{x^4}+c$; 2) $\frac{x^2}{2}\cdot arctg2x-\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{8}\cdot arctg2x+c$;

3) $x^2+6x-\ln|x-1| + 15\ln|x-2| + c$.

Типовая задача 3

Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = x^2 - 7x + 12$, $y = x - 3$.

Решение. Фигура имеет вид, изображенный на рис. 19.

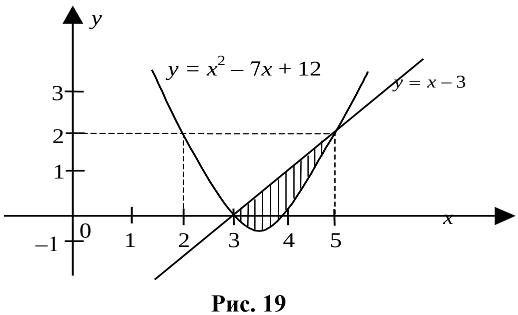

Рис. 19

Определим координаты точек пересечения линий. Для этого решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2-7x+12, \\ y = x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x-3, \\ x-3 = x^2-7x+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x-3, \\ x^2-8x+15=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Абсциссы точек пересечения линий — $x = 3$, $x = 5$. Следовательно, пределы интегрирования — $a = 3$, $b = 5$.

Таким образом, $S = \int_3^5 (x - 3 - (x^2 - 7x + 12))dx = \int_3^5 (-x^2 + 8x - 15)dx =$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 15x \right)\Bigg|_3^5 = -\frac{125}{3} + 100 - 75 - (-9 + 36 - 45) = \frac{4}{3} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$ кв. ед.

3. Задания 4 и 5 по теме «Ряды и их применение к приближенным вычислениям определенных интегралов»

Краткие теоретические сведения

Понятие числового знакоположительного ряда

Числовым рядом (или просто *рядом*)

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

называется бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, соединенных знаком сложения.

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами ряда*, u_n — *общим членом ряда.*

Ряд считается *заданным*, если известен его общий член $u_n = f(n)$, т. е. задана функция от натурального аргумента.

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \ldots,\ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n .$$

Сумма S_n первых n членов ряда называется n-й *частичной суммой ряда.*

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число S называется *суммой ряда* (1) и записывается в виде

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ .$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется *расходящимся.* Такой ряд суммы не имеет.

Признаки сходимости

Теорема (***необходимый признак сходимости ряда***). *Если ряд* (1) *сходится, то его общий член* u_n *стремится к нулю при* $n \to \infty$, *т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Для сходимости ряда (1) требование $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ не достаточно.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называемый *гармоническим рядом*, расходится, хотя и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Следствие (***достаточное условие расходимости ряда***). *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *или этот предел не существует, то ряд расходится.*

Простейшими примерами числовых рядов являются следующие ряды:

1. *Обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(n \in N,\ p \in R)$.

Он сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

2. *Ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b \cdot q^{n-1}$.

При $|q| \geq 1$ он расходится, при $|q| < 1$ — сходится.

Перечислим некоторые признаки сходимости для числовых рядов с положительными членами.

Признак Даламбера. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, *то:*

1. *При* $q < 1$ *ряд* (1) *сходится.*
2. *При* $q > 1$ *ряд* (1) *расходится.*
3. *При* $q = 1$ *вопрос о сходимости остается открытым.*

Признак Коши. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q,$ то:

1. *При* $q<1$ *ряд* (1) *сходится.*

2. *При* $q>1$ *ряд* (1) *расходится.*

3. *При* $q=1$ *вопрос о сходимости остается открытым.*

Признаки сравнения

Пусть даны два ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \qquad (2)$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots. \qquad (3)$$

1. *Если* $u_n\le v_n$ *и ряд* (3) *сходится, то сходится и ряд* (2).
Если ряд (2) *расходится, то расходится и ряд* (3).

Пример. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (частный случай при $p=2>1$ обобщенного гармонического ряда) и $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-3}}$ расходится, так как расходится ряд $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ (частный случай при $p=\frac{1}{2}<1$ обобщенного гармонического ряда) и $\frac{1}{\sqrt{n-3}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\ne 0$, *то ряды* (2) *и* (3) *сходятся или расходятся одновременно.*

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3-n+2}$ является сходящимся, так как существует сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (частный случай при $p = 3 > 1$ обобщенного гармонического ряда) и конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3-n+2}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3-n+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}-\frac{n}{n^3}+\frac{2}{n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}=\frac{1}{1-0+0}=1\neq 0.$$

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными.*

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots. \qquad (4)$$

Рассмотрим знакоположительный ряд, состоящий из модулей членов ряда (4):

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots . \qquad (5)$$

Ряд (4) сходится, если сходится ряд (5). В этом случае ряд (4) называется *абсолютно сходящимся*. Если же ряд (4) сходится, а ряд (5) расходится, то ряд (4) называется *условно сходящимся*.

Частным случаем знакопеременного ряда является *знакочередующийся ряд*

$$u_1-u_2+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \qquad (6)$$

$$(u_n>0,\ n=1,2,\ldots),$$

в котором положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно.

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости.

Теорема (признак Лейбница)

Знакочередующийся ряд (6) *сходится, если:*

1. *Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е.* $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$.

2. *Общий член ряда стремится к нулю, т. е.* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом остаток $R_n = S - S_n$ не превосходит по модулю первого отбрасываемого члена u_{n+1}, т. е. $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Степенные ряды

Будем рассматривать ряды, членами которых являются степенные функции:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \qquad (7)$$

Такие ряды называются *степенными*, а числа a_i (i = 0, 1, 2, …) — *коэффициентами* этого степенного ряда.

Множество тех значений x, при которых степенной ряд (7) сходится, называется *областью сходимости* этого степенного ряда.

Число R называется *радиусом сходимости* ряда (7), если при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < R$, ряд (7) сходится, а при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > R$, — расходится.

Радиус сходимости R определяется по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* ряда (7).

При $x = R$, $x = -R$ ряд (7) может как сходиться, так и расходиться. Вопрос о сходимости ряда (7) в этих точках решается путем дополнительных исследований.

Ряд Маклорена

Ряд $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$ называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Приведем следующие известные разложения функций в ряд Маклорена:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$ область сходимости $(-\infty;\infty)$.

2. $sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$ область сходимости $(-\infty;\infty)$.

3. $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$ область сходимости $(-\infty;\infty)$.

4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m\cdot(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$
$+\frac{m\cdot(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,\ m \in R,$ область сходимости $(-1;1)$.

5. $\ln\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$ область сходимости $(-1;1]$.

6. $arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ \ldots,$ область сходимости $[-1;1]$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется числовым рядом, членами ряда? Приведите примеры.
2. Что вы понимаете под суммой ряда? Какой ряд называется сходящимся?
3. Сформулируйте признак расходимости ряда в термине предела общего члена.
4. Дайте определение обобщенного гармонического ряда. При каких p он сходится?
5. Сформулируйте первый и второй признаки сравнения. В чем их общность и отличие?
6. Сформулируйте достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда. Как вычислить сумму членов знакочередующегося ряда с указанной степенью точности?

7. Что называется степенным рядом? Что вы понимаете под точкой сходимости этого ряда?

8. Что называется радиусом сходимости степенного ряда и как его определить?

9. Чем отличается область сходимости от интервала сходимости степенного ряда?

10. Какие основные свойства степенных рядов вы знаете?

11. Что вы понимаете под рядом Маклорена? Как разложить функции в этот ряд?

12. Какие разложения элементарных функций в ряд Маклорена вы знаете?

Типовая задача 4

Написать степенной ряд по заданному общему члену

$$u_n = \frac{(-1)^n \cdot x^n}{7^n}.$$

Найти область сходимости этого ряда.

Решение. При $n = 0$ получаем свободный член $a_0 = 1$ данного ряда, при $n = 1$ — член $u_1 = -\frac{1}{7}x$, при $n = 2$ — член $u_2 = \frac{1}{49}x^2$ и т. д.

Получаем следующий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot x^n}{7^n} = 1 - \frac{1}{7}x + \frac{1}{49}x^2 - ... + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{7^n} + \dots .$$

Находим радиус сходимости данного ряда. Имеем:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{7^n},\ \ a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{7^{n+1}},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{7^n}\cdot\frac{7^{n+1}}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{7^n \cdot 7}{7^n} = 7.$$

Следовательно, (–7; 7) — интервал сходимости ряда. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т. е. при $x = -7$, $x = 7$.

Пусть $x = -7$. Тогда степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot x^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot (-1)^n \cdot 7^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n} = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots .$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 \neq 0$, то ряд расходится (достаточное условие расходимости числового ряда).

Пусть $x = 7$. Получаем следующий знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 7^n}{7^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$$

Этот ряд расходится, так как не существует предела последовательности 1,0,1,0… частичных сумм этого ряда.

Таким образом, (–7; 7) — область сходимости данного степенного ряда.

Ответ: (–7; 7).

Типовая задача 5

Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Заменив x на $-\frac{x^2}{2}$, получим:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^4}{4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n} + \ldots .$$

Умножая обе части последнего равенства на x, будем иметь:

$$x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4 \cdot 2!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2^n \cdot n!} + \ldots .$$

Итак, $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int\limits_0^1 \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4 \cdot 2!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2^n \cdot n!} + \ldots \right) dx =$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{4\cdot 6\cdot 2!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+2}}{2^n \cdot (2n+2)\cdot n!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6\cdot 2!} -$$

$$- \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n \cdot (2n+2)\cdot n!} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{48} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2^n \cdot (2n+2)\cdot n!} + \ldots .$$

Получаем знакочередующийся ряд. По признаку Лейбница имеем:

1. $\frac{1}{2} > \frac{1}{8} > \frac{1}{48} > \ldots$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n \cdot (2n+2)\cdot n!} = 0$.

Значит, ряд сходится. По этому признаку первый отбрасываемый член по модулю меньше u_{n+1}. Если u_{n+1} взять по модулю меньшим, чем 0,001, то из $|R_n| \le u_{n+1} < 0{,}001$ следует, что остаток R_n меньше 0,001. Имеем:

$$u_0 = \frac{1}{2} > 0{,}001,\; u_1 = \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8} > 0{,}001,\; u_2 = \frac{1}{4\cdot 2!\cdot 6} = \frac{1}{48} > 0{,}001,$$

$$u_3 = \frac{1}{8\cdot 3!\cdot 8} = \frac{1}{384} > 0{,}001,\; u_4 = \frac{1}{16\cdot 4!\cdot 10} = \frac{1}{3840} < 0{,}001.$$

Значит, $u_4 = \frac{1}{3840}$ — первый отбрасываемый член.

Таким образом, с точностью до 0,001

$$\int_0^1 x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{48} - \frac{1}{384} = \frac{151}{384} \approx 0{,}393.$$

Ответ: 0,393.

4. Задания 6 и 7 по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Краткие теоретические сведения

Понятие о дифференциальном уравнении и его решении

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные вплоть до n-го порядка.

Решением дифференциального уравнения (1) называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения (1) называется такое его решение

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n),$$

которое является функцией переменной x и n произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Частным решением дифференциального уравнения (1) называется такое его решение, которое получается из общего при некоторых конкретных числовых значениях постоянных C_1, C_2, …, C_n. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием.*

Построенный на плоскости Oxy график решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

К рассмотрению дифференциальных уравнений приводят многие задачи экономики. Например, неоклассическая задача экономического роста приводит к дифференциальному уравнению первого порядка. Непрерывные модели экономики с применением дифференциальных уравнений (независимой переменной является время) достаточно эффективны при исследовании эволюции экономических систем на длительных интервалах времени. Они являются предметом исследования *экономической динамики*.

Задача Коши и ее решение

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Задача Коши для данного дифференциального уравнения состоит в следующем: среди всего множества частных решений, которые получаются из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретных значениях произвольной постоянной C, следует найти такое частное решение $y = \varphi(x, C_0)$, которое удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрически задача Коши состоит в выборе среди всего множества интегральных кривых такой кривой, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 20).

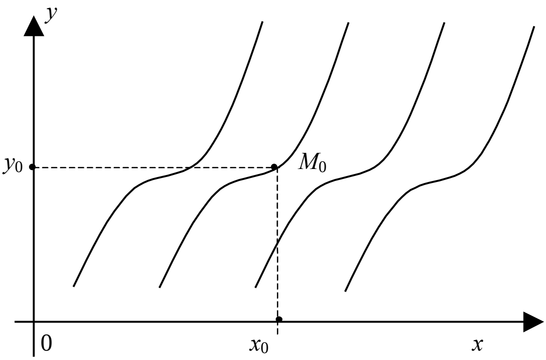

Рис. 20

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). *Если в дифференциальном уравнении* (2) *функция* $f(x,y)$ *и ее частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в некоторой области, содержащей точку* (x_0,y_0), *то решение дифференциального уравнения* (2) *при начальном условии* $y(x_0) = y_0$ *существует и оно единственно.*

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и его решение

Так называется дифференциальное уравнение вида

$$\varphi_1(x)\cdot\psi_1(y)\cdot dx + \varphi_2(x)\cdot\psi_2(y)\cdot dy = 0.$$

Делением обеих частей этого уравнения на $\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y)$, получаем дифференциальное уравнение с разделенными переменными

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\cdot dx + \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\cdot dy = 0\,.$$

Почленное интегрирование этого уравнения приводит к равенству

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \cdot dx + \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} \cdot dy = C,$$

которое в неявной форме определяет *решение* исходного уравнения.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка и его решение

Так называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{3}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — некоторые функции переменной x.

Решение этого уравнения можно найти *методом Бернулли*, который заключается в применении подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые неизвестные функции.

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

Так называется уравнение вида

$$y'' + \alpha_1(x) \cdot y' + \alpha_2(x) \cdot y = 0. \tag{4}$$

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ называются *линейно независимыми*, если равенство

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0 \tag{5}$$

(α_1, α_2 — постоянные) возможно лишь в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если хотя бы одна $\alpha_i \neq 0$ (i = 1, 2), а тождество (5) возможно, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, называются *линейно зависимыми*.

Пример. 1. $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ — линейно независимые функции при $k_1 \neq k_2$.

2. $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x \cdot e^{kx}$ — линейно независимые функции.

Теорема. *Если y_1, y_2 — какие-либо два линейно независимые частные решения однородного линейного уравнения* (4)*, то его общим решением служит функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.*

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Это будет уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \text{ где } p \in R, q \in R. \qquad (6)$$

Для решения этого уравнения составляем и решаем соответствующее ему *характеристическое уравнение*

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (7)$$

При его решении в зависимости от дискриминанта D могут встретиться следующие три случая:

1. $D > 0$. Тогда уравнение (7) имеет два различных действительных корня k_1 и k_2. Дифференциальное уравнение (6) имеет линейно независимые частные решения $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$.

При этом $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$ — общее решение уравнения (6).

Пример. Для решения уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$ составляем характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$. Отсюда $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x$ — общее решение.

2. $D = 0$. Уравнение (7) имеет два равных действительных корня $k_1 = k_2 = k$. Уравнение (6) имеет линейно независимые частные решения $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$. Тогда $y = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}$ — общее решение уравнения.

Пример. Уравнение $y'' + 2y' + y = 0$ имеет характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 1 = 0$, откуда $k_1 = k_2 = -1$.

Тогда $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$ — общее решение.

3. $D < 0$. Уравнение (7) не имеет решений во множестве R действительных чисел, но имеет решение во множестве C комплексных чисел (т. е. чисел вида $Z = \alpha + \beta \cdot i$, $\alpha, \beta \in R$, i — мнимая единица, обладающая свойством $i^2 = -1$). Тогда уравнение (6) имеет линейно независимые частные решения $y_1 = e^{\alpha x} \cdot cos\, \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cdot sin\, \beta x$.

При этом $y = e^{\alpha x}(C_1 \cdot cos\, \beta x + C_2 \cdot sin\, \beta x)$ — общее решение.

Пример. Уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$ имеет в качестве характеристического уравнение $k^2 + 4k + 5 = 0$. Решая его, имеем:

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i .$$

Общим решением дифференциального уравнения будет

$$y = e^{-2x}(C_1 \cdot cos\, x + C_2 \cdot sin\, x) .$$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Это будет уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x) . \qquad (8)$$

Теорема. *Общее решение Y линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами*

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

есть сумма его частного решения $\bar{y}$ *и общего решения* y *соответствующего однородного уравнения* (6)*, т. е.* $Y = y + \bar{y}$.

В некоторых случаях *частное решение* $\bar{y}$ уравнения (8) можно найти по виду правой части $f(x)$.

1. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$,

где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени и число α не является корнем характеристического уравнения однородного уравнения (6). Тогда *частное решение* $\bar{y}$ следует искать в виде

$$\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ — многочлен n-й степени, но с неопределенными коэффициентами.

Если же α — корень характеристического уравнения кратности r, то *частное решение* ищут в виде

$$\bar{y} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x).$$

2. $f(x) = e^{\alpha x}(a \cdot \cos \beta x + b \cdot \sin \beta x)$, $\alpha \pm \beta \cdot i$ не являются корнями характеристического уравнения. Тогда *частное решение* $\overline{y}$ ищут в виде

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(\mathrm{A} \cdot \cos \beta x + \mathrm{B} \cdot \sin \beta x),$$

где *A*, *B* — некоторые неопределенные коэффициенты.

Если же $\alpha \pm \beta \cdot i$ — корни характеристического уравнения, то частное решение ищут в виде

$$\overline{y} = \mathrm{x} \cdot e^{\alpha x} \cdot (\mathrm{A} \cdot \cos \beta x + \mathrm{B} \cdot \sin \beta x).$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется обыкновенным дифференциальным уравнением? Приведите примеры.
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения *n*-го порядка? Что такое частное решение этого уравнения?
3. Где применяются дифференциальные уравнения в области экономики? Приведите примеры.
4. В чем состоит задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной? Опишите геометрическую интерпретацию этой задачи.
5. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными? Как оно решается?
6. Какое уравнение называется линейным неоднородным уравнением первого порядка и как оно решается?
7. Что называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка? Какими свойствами обладает общее решение этого уравнения?
8. Каким образом решается линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
9. Что называется линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами? Какова структура его общего решения?
10. Какие вы знаете случаи нахождения частного решения $\overline{y}$ неоднородного уравнения по виду его правой части?

Типовая задача 6

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{1}{x} y = \frac{cos\,x}{x}$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{\pi}$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка решаем методом Бернулли. Полагаем, что $y = u \cdot v$, где u, v — некоторые неизвестные пока функции. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя в данное уравнение вместо y, y' их указанные значения, получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{1}{x} \cdot u \cdot v = \frac{cos\,x}{x}$$

или

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{1}{x} \cdot v\right) = \frac{cos\,x}{x}. \qquad (9)$$

Выберем функцию v таким образом, чтобы выполнялось равенство $v' + \frac{1}{x} \cdot v = 0$.

Отсюда, учитывая, что $v' = \frac{dv}{dx}$, представим уравнение в виде

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем: $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$.

Отсюда

$$\ln|v| = -\ln|x| + c, \quad \ln|v| = \ln|x|^{-1} + \ln c_1, \text{ где } c = \ln c_1,$$

$$\ln|v| = \ln(c_1 \cdot x^{-1}), \quad |v| = \frac{c_1}{x}, \quad v = \frac{c_2}{x}, \text{ где } c_2 = \pm c_1.$$

Пусть $c_2 = 1$. Тогда $v = \frac{1}{x}$.

Подставляя полученное значение функции v в формулу (9), получим:

$$u'\cdot\frac{1}{x}+u\cdot 0=\frac{cos\,x}{x},\ u'=cos\,x,$$

$$du=cos\,x\cdot dx,\ u=\int cos\,x\cdot dx,\ u=sin\,x+C.$$

Таким образом, $y=(sin\,x+C)\cdot\frac{1}{x}$ — общее решение данного дифференциального уравнения.

Теперь решаем задачу Коши. Подставляем в формулу общего решения вместо x, y соответственно числа $\frac{\pi}{6}, \frac{3}{\pi}$:

$$\frac{3}{\pi}=(\sin\frac{\pi}{6}+C)\cdot\frac{1}{\pi/6},\quad \frac{3}{\pi}=(\frac{1}{2}+C)\cdot\frac{6}{\pi},\quad 3=3+6\cdot C\Rightarrow C=0.$$

Итак, $y=sinx\cdot\frac{1}{x}$ — частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее поставленному начальному условию.

Ответ: $y=(sin\,x+C)\cdot\frac{1}{x}$, $y=sin\,x\cdot\frac{1}{x}$.

Типовая задача 7

Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-5y'+4y=$ $=x^2-1$.

Решение. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решаем однородное уравнение $y''-5y'+4y=0$. Для этого составляем характеристическое уравнение $k^2-5k+4=0$, откуда $k_1=1$, $k_2=4$.

Тогда $y=C_1\cdot e^x+C_2\cdot e^{4x}$ — общее решение однородного уравнения.

Находим частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения. Его будем искать в виде $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$.

Тогда $\bar{y}'=2Ax+B$, $\bar{y}''=2A$. Подставляя полученные значения $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное уравнение, будем иметь:

$$2A-10Ax-5B+4Ax^2+4Bx+4C=x^2-1,$$

или

$$4Ax^2+(4B-10A)\cdot x+2A-5B+4C=x^2-1.$$

Два многочлена между собой равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях. Отсюда

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 4B - 10A = 0, \\ 2A - 5B + 4C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4}, \\ B = \dfrac{5}{8}, \\ C = \dfrac{13}{32}. \end{cases}$$

Таким образом, $\bar{y} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{13}{32}$.

Итак, $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{13}{32}$ — общее решение данного неоднородного уравнения.

Ответ: $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{4x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{13}{32}$.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Вариант каждой контрольной работы определяется по таблицам в зависимости от двух последних цифр номера личного дела студента.

В таблицах по вертикали расположены цифры от 0 до 9, каждая из которых — предпоследняя цифра номера личного дела, а по горизонтали — его последняя цифра. Пересечение колонки и строки определяет номера задач контрольной работы.

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил. Студент, выполнивший работу без соблюдения этих правил, к защите не допускается, и его работа возвращается на доработку.

Задания контрольной работы следует записывать в тетради пастой любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

В заголовке работы должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, номера личного дела, группы, контрольной работы и задач.

Заголовок работы надо поместить на обложке тетради, здесь же нужно указать дату отсылки работы в университет и почтовый адрес студента.

Решения задач следует располагать по нарастающей с сохранением принятой в данном пособии нумерации.

Необходимо полностью записывать условия заданий и задач согласно вариантам контрольной работы.

Решения нужно излагать подробно, объясняя все действия и делая необходимые чертежи.

Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, не засчитывается.

В конце работы нужно указать использованную литературу, поставить дату выполнения контрольной работы и личную подпись.

После получения отрецензированной работы студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и вернуть ее на повторное рецензирование.

Если рецензент предлагает переделать в работе решение какой-то задачи или дать более обстоятельное решение и прислать эти исправления для повторной проверки, то это следует выполнить в краткий срок.

В случае недопуска студента к защите и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться повторным представлением исправленных решений отдельных задач, вся контрольная работа должна выполниться заново.

При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться отрецензированная работа и рецензия на нее. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять (или вклеивать дополнительно) в конце тетради несколько чистых листов для всех исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

В случае получения положительной рецензии студент готовится к защите контрольной работы.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

		Последняя цифра номера личного дела студента									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Предпоследняя цифра номера личного дела студента	**0**	10 20 24 32 44 56 70	9 18 23 33 43 51 68	8 16 22 37 42 52 66	7 14 21 38 41 53 64	6 12 30 39 45 54 62	5 19 29 40 46 57 69	4 13 28 34 48 58 63	3 15 27 35 50 59 65	2 17 26 36 47 60 67	1 11 25 31 49 55 61
	1	1 12 23 31 49 55 68	2 14 25 32 48 54 64	3 16 27 33 47 53 66	4 18 29 34 46 52 70	5 20 30 35 45 51 61	6 11 21 36 44 59 63	7 13 24 37 43 57 65	8 15 22 38 42 58 69	9 17 26 39 41 60 67	10 19 28 40 50 56 62
	2	7 19 29 37 50 57 69	6 17 28 36 49 56 68	5 15 27 34 48 55 64	4 13 25 32 47 51 70	1 11 23 39 41 59 63	2 12 22 40 42 60 65	3 20 21 35 43 58 66	8 18 30 38 46 52 62	9 16 24 33 45 53 67	10 14 26 31 44 54 61
	3	9 12 30 39 42 56 61	8 11 25 38 41 51 63	6 13 27 40 43 57 62	4 14 29 31 45 52 64	10 19 21 33 46 53 66	3 20 23 35 48 58 65	5 18 24 37 47 54 69	2 17 22 32 49 55 67	7 16 26 34 50 60 70	1 15 28 36 44 59 68
	4	8 19 27 36 41 57 70	6 17 25 34 48 56 69	9 18 23 40 50 60 68	5 16 21 38 46 54 64	10 20 29 39 45 58 67	4 13 30 37 47 51 65	2 11 26 35 49 55 66	3 15 24 33 42 52 63	7 12 22 31 43 59 62	1 14 28 32 44 53 61
	5	9 17 26 36 50 55 61	2 19 21 40 46 57 62	4 16 23 31 41 51 63	6 11 25 37 47 56 64	8 13 27 32 42 52 67	10 15 22 39 49 58 68	1 18 29 33 43 53 65	3 20 24 35 45 59 66	5 12 30 38 48 54 69	7 14 28 34 44 60 70

Окончание

		Последняя цифра номера личного дела студента									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Предпоследняя цифра номера личного дела студента	**6**	4 12 24 37 48 58 68	9 20 30 40 46 55 67	1 15 28 33 50 54 64	5 11 21 36 41 59 63	2 17 26 31 45 60 70	7 19 23 38 49 51 62	3 13 29 32 42 56 69	6 18 22 39 47 52 66	10 14 25 34 43 57 65	8 16 27 35 44 53 61
	7	3 18 25 37 47 56 65	1 11 28 39 44 51 66	6 15 24 33 41 60 61	9 12 21 31 49 53 68	2 17 29 40 50 57 62	5 13 22 35 42 59 69	8 19 26 32 46 55 63	4 14 23 38 43 58 70	10 16 30 36 48 52 64	7 20 27 34 45 54 67
	8	6 18 26 37 41 58 61	10 13 24 38 46 56 62	3 14 30 40 42 53 63	7 20 22 34 45 51 67	2 11 21 33 43 55 68	1 17 28 35 48 59 70	4 12 23 31 44 52 65	9 19 29 36 47 57 66	5 15 25 32 49 54 69	8 16 27 39 50 60 64
	9	10 16 24 36 50 58 65	4 12 28 34 43 53 66	2 18 21 39 46 57 64	6 13 26 31 48 51 67	8 15 22 35 42 52 63	1 17 29 32 45 56 70	5 20 30 37 47 59 62	9 11 23 38 41 60 68	3 19 27 33 44 54 69	7 14 25 40 49 55 61

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

		Последняя цифра номера личного дела студента									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Предпоследняя цифра номера личного дела студента	**0**	6 16 24 35 46 51 70	4 17 23 39 50 56 68	3 19 29 36 45 57 66	9 13 28 31 41 54 64	1 20 30 33 43 55 62	10 12 22 32 49 53 69	2 18 21 38 42 60 63	8 14 27 34 48 52 65	7 15 26 37 47 58 67	5 11 25 40 44 59 61
	1	10 12 21 37 48 53 68	9 18 22 38 41 54 64	8 19 23 36 46 55 66	7 17 25 35 45 56 70	1 11 30 39 44 57 61	5 15 26 33 49 60 63	4 14 27 32 43 58 65	3 13 28 31 50 59 69	2 20 29 40 47 52 67	6 16 24 34 42 51 62
	2	5 16 26 31 45 54 69	4 15 25 32 50 56 68	7 20 28 36 46 55 64	3 14 24 33 41 60 70	9 19 30 39 43 57 63	6 17 27 35 48 53 65	2 11 22 38 47 52 66	10 18 29 40 44 58 62	1 12 23 34 42 59 67	8 13 21 37 49 51 61
	3	6 14 27 34 47 51 61	5 20 25 33 50 59 63	2 13 28 37 46 54 62	10 17 24 32 41 58 64	1 15 29 38 45 53 66	4 12 23 35 42 55 65	3 16 26 40 44 52 69	8 18 22 36 48 57 67	9 11 30 39 43 56 70	7 19 21 31 49 60 68
	4	8 19 28 38 44 54 70	4 16 21 34 48 52 69	10 11 29 36 47 57 68	3 13 27 31 50 60 64	7 12 23 35 46 56 67	5 14 22 37 45 55 65	6 20 26 40 49 59 66	1 15 30 32 43 53 63	2 17 25 33 42 58 62	9 18 24 39 41 51 61
	5	9 20 21 35 48 51 61	4 18 24 37 47 52 62	5 17 27 33 50 59 63	6 14 22 39 44 55 64	8 16 25 31 43 56 67	10 19 29 38 42 57 68	7 11 23 36 46 53 65	3 15 26 32 41 58 66	1 13 30 34 45 54 69	2 12 28 40 49 60 70

Окончание

Предпоследняя цифра номера личного дела студента		Последняя цифра номера личного дела студента									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	6	5 16 26 38 45 60 68	2 19 29 32 43 57 67	9 12 22 39 44 56 64	4 17 27 34 47 54 63	1 20 30 31 49 51 70	6 15 25 37 46 52 62	7 14 24 36 42 53 69	8 13 23 35 48 55 66	3 18 28 33 41 58 65	10 11 21 40 50 59 61
	7	4 20 27 33 43 54 65	1 12 21 37 45 56 66	9 19 25 31 41 55 61	7 17 23 34 47 59 68	5 13 22 40 50 58 62	8 14 30 38 46 57 69	6 18 24 35 48 60 63	10 16 26 32 44 52 70	3 15 29 39 49 51 64	2 11 28 36 42 53 67
	8	10 16 27 32 46 58 61	6 17 26 39 41 56 62	7 20 22 36 47 59 63	1 11 29 35 45 57 67	9 19 23 34 48 60 68	8 18 24 33 50 55 70	2 12 30 38 42 54 65	3 13 28 40 44 53 66	5 15 25 31 43 52 69	4 14 21 37 49 51 64
	9	8 17 21 36 46 54 65	10 11 23 37 48 55 66	6 20 24 33 43 51 64	9 16 22 38 47 60 67	5 19 25 39 50 53 63	7 18 27 40 49 52 70	1 12 30 35 45 56 62	3 15 28 31 41 57 68	4 14 26 32 44 58 69	2 13 29 34 42 59 61

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Задание 1

Даны вершины $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ треугольника.

Найти:

1. Длину стороны AB.
2. Угол A.
3. Уравнение медианы, проведенной из вершины C.
4. Координаты точки пересечения высот треугольника.
5. Длину высоты, опущенной из вершины C.
6. Образ точки пересечения высот при осевой симметрии относительно прямой AB.
7. Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения высот, параллельной прямой AB.

Сделать чертеж.

Задачи 1–10

1. $A(0;0)$, $B(6;3)$, $C(3;4)$.
2. $A(0;2)$, $B(6;5)$, $C(3;6)$.
3. $A(–1;0)$, $B(5;3)$, $C(2;4)$.
4. $A(–2;1)$, $B(4;4)$, $C(1;5)$.
5. $A(–2;0)$, $B(4;3)$, $C(1;4)$.
6. $A(–1;2)$, $B(5;5)$, $C(2;6)$.
7. $A(–2;2)$, $B(4;5)$, $C(1;6)$.
8. $A(0;1)$, $B(6;4)$, $C(3;5)$.
9. $A(1;1)$, $B(7;4)$, $C(4;5)$.
10. $A(1;–1)$, $B(7;2)$, $C(4;3)$.

Задание 2

Найти уравнение линии, если отношение расстояний от каждой ее точки до точки $F(a;b)$ и до прямой $Ax + By + C = 0$ равно λ. Сделать чертеж.

Задачи 11–20

11.	$a = 1$,	$b = 0$,	$A = 0$,	$B = 1$,	$C = 3$,	$\lambda = 3$.
12.	$a = 2$,	$b = 1$,	$A = 1$,	$B = 0$,	$C = 2$,	$\lambda = 1$.
13.	$a = –3$,	$b = 0$,	$A = 1$,	$B = 0$,	$C = 0$,	$\lambda = 2$.
14.	$a = 0$,	$b = –4$,	$A = 0$,	$B = 1$,	$C = 1$,	$\lambda = \sqrt{2}$.

15. $a = 4$, $b = 0$, $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $\lambda = \sqrt{3}$.

16. $a = -3$, $b = 3$, $A = 0$, $B = 1$, $C = -1$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17. $a = 3$, $b = -2$, $A = 0$, $B = 1$, $C = -4$, $\lambda = 1$.

18. $a = -2$, $b = 0$, $A = 0$, $B = 1$, $C = -3$, $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

19. $a = 0$, $b = 3$, $A = 1$, $B = 0$, $C = -4$, $\lambda = \sqrt{5}$.

20. $a = 0$, $b = 1$, $A = 0$, $B = 1$, $C = 3$, $\lambda = \sqrt{6}$.

Задание 3

Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и вектор $\bar{x}$ со своими координатами в базисе $\overline{\ell_1}$, $\overline{\ell_2}$, $\overline{\ell_3}$. Показать, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ сами образуют базис, и найти координаты этого вектора $\bar{x}$ в новом базисе.

Задачи 21–30

21. $\bar{a} = (2;-1;2)$, $\bar{b} = (3;1;2)$, $\bar{c} = (0;-1;2)$, $\bar{x} = (1;-7;10)$.

22. $\bar{a} = (1;3;\ 0)$, $\bar{b} = (2;0;0)$, $\bar{c} = (1;2;-1)$, $\bar{x} = (3;-3;\ 0)$.

23. $\bar{a} = (4;7;8)$, $\bar{b} = (9;1;3)$, $\bar{c} = (2;-4;1)$, $\bar{x} = (1;-13;-13)$.

24. $\bar{a} = (2;7;3)$, $\bar{b} = (3;1;8)$, $\bar{c} = (2;-7;4)$, $\bar{x} = (16;14;27)$.

25. $\bar{a} = (-3;2;1)$, $\bar{b} = (4;1;2)$, $\bar{c} = (1;2;-1)$, $\bar{x} = (-3;10;-1)$.

26. $\bar{a} = (2;1;4)$, $\bar{b} = (-3;5;1)$, $\bar{c} = (1;-4;-3)$, $\bar{x} = (-7;5;-5)$.

27. $\bar{a} = (2;-4;3)$, $\bar{b} = (1;-2;4)$, $\bar{c} = (3;-1;5)$, $\bar{x} = (2;-9;5)$.

28. $\bar{a} = (2;3;1)$, $\bar{b} = (-1;2;-2)$, $\bar{c} = (1;2;1)$, $\bar{x} = (9;11;7)$.

29. $\bar{a} = (1;2;3)$, $\bar{b} = (2;-1;-1)$, $\bar{c} = (1;3;4)$, $\bar{x} = (4;4;6)$.

30. $\bar{a} = (1;2;1)$, $\bar{b} = (-1;0;1)$, $\bar{c} = (2;0;0)$, $\bar{x} = (4;2;0)$.

Задание 4

Исследовать на совместность и решить систему уравнений.

Задачи 31–40

31. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 - 9x_2 - x_3 + 10x_4 = 7. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -5. \end{cases}$

37. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ -x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 + 7x_4 = 5. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 11x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$

Задание 5

Вычислить пределы функций.

Задачи 41–50

41. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}$ при а) $x_0 = 3$; б) $x_0 = -5$; в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x} - 2}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 3x$; 4) $\lim\limits_{x \to 2} (5 - 2x)^{\frac{3-x}{x-2}}$.

42. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$ при а) $x_0 = -4$; б) $x_0 = 1$; в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{2x^3}$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2} \right)^{2x-4}$.

43. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ при а) $x_0=-6$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos\,8x}{1-cos\,2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-4x}$.

44. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$ при а) $x_0=2$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}(3+2x)^{\frac{x+4}{x+1}}$.

45. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$ при а) $x_0=-1$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos\,x-cos^3x}{4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+1}{4x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

46. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4-3x-x^2}{x^3+64}$ при а) $x_0=-1$; б) $x_0=-4$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{x^2-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos\,4x}{sin^2 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{3x-1}\right)^{x+2}$.

47. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$ при а) $x_0=-4$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,5x}{2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{1-x}{x-3}}$.

48. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x^2+4}$ при а) $x_0=-3$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{1-\sqrt{x+3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg\,2x}{1-cos\,3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x-2}{-x+3}\right)^{2x-1}$.

49. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6-x-2x^2}{x^3+8}$ при а) $x_0=-3$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}5x\cdot ctg\,6x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-4x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

50. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ при а) $x_0 = -9$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos\,x-cos\,5x}{3x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

Задание 6

Найти производные функций.

Задачи 51–60

51. 1) $y = sin(e^x + 1)\cdot \ln x$;

    2) $y = arctg(e^x + 5x)$;

    3) $y = (x^2 + x)^{10}\cdot \mathrm{tg}3x$.

52. 1) $y = tg(\ln x - 2)\cdot e^{2x}$;

    2) $y = arcsin^2(e^x - x)$;

    3) $y = (sin2x + 3)^{10}\cdot x^2$.

53. 1) $y = ctg(5^{x^2} - 1)\cdot sin\,x$;

    2) $y = arccos^3(e^x - 3)$;

    3) $y = (tg3x + 4)^{12}\cdot x^3$.

54. 1) $y = (3^{x^2} + 5x)^{11}\cdot tgx$;

    2) $y = 5^{x^3}\cdot cos(4x-2)$;

    3) $y = (arctg\sqrt{x})\cdot sin2x$.

55. 1) $y = (\sin 2x + 3x)^8\cdot ctg\,x$;

    2) $y = \dfrac{sin2x}{5^x + x^3}$;

    3) $y = cos^2(e^x + 5x)$.

56. 1) $y = tg\,\dfrac{e^x+2}{x-3}$;

    2) $y = arcctg^3(e^x - 2)\cdot x$;

    3) $y = \dfrac{arccos\sqrt[3]{x}}{x-4}$.

57. 1) $y = cos\,\dfrac{4^x-2}{x+9}$;

    2) $y = 2^{x^2}\cdot tg(4+x)$;

    3) $y = \dfrac{cos^3 2x}{4-x}$.

58. 1) $y = tg9x - x^2\cdot e^{x^3}$;

    2) $y = \dfrac{tg(3^x+5x)}{sin\,x-2}$;

    3) $y = \dfrac{ctg^4 3x}{5+x^2}$.

59. 1) $y = (cos4x - 2x)^7$;

    2) $y = cosx^4\cdot x^3$;

    3) $y = \dfrac{\ln^2(x-2)}{x^3}$.

60. 1) $y = (sin\,5x + e^{2x})^4$;

    2) $y = \dfrac{tg^2 3x}{x+2}$;

    3) $y = x^4\cdot \ln(x-5)$.

Задание 7

Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию и построить ее график.

Задачи 61–70

61. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$;

62. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$;

63. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;

64. $y = \dfrac{1}{x} + x^2$;

65. $y = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 5}$;

66. $y = \dfrac{x^2 + 9}{x}$;

67. $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$;

68. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;

69. $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$;

70. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 2

Задание 1

Показать, что данная функция удовлетворяет указанному соотношению.

Задачи 1–10

1. $u=\dfrac{y^2}{3x}+arcsin\,(xy)$, $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$.

2. $u=\sqrt{2xy+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y+x}{u}$.

3. $u=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=2\cdot\dfrac{x+y}{x-y}$.

4. $u=(x^2+y^2)\cdot tg\dfrac{x}{y}$, $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u$.

5. $u=xy+x\cdot e^{\frac{y}{x}}$, $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=xy+u$.

6. $u=x^y\cdot y^x$, $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=(x+y+\ln u)\cdot u$.

7. $u=y\cdot e^{x^2-y^2}$, $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{y^2}$.

8. $u=\ln\dfrac{x}{y}+x^3-y^3$, $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3\cdot(x^3-y^3)$.

9. $u=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$.

10. $u=y\cdot sin(y\cdot e^{-x})$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$.

Задание 2

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

Задачи 11–20

11. 1) $\int \frac{\sqrt{1+tg2x}}{\cos^2 2x}dx$;

2) $\int x\cdot e^{8x}dx$;

3) $\int \frac{x^3-1}{x^2+3x+2}dx$.

12. 1) $\int e^{3\cos x}\cdot \sin x\,dx$;

2) $\int arcsin\,4xdx$;

3) $\int \frac{x^4+1}{x^2+x-2}dx$.

13. 1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-1}}dx$;

2) $\int x\cdot cos\,9xdx$;

3) $\int \frac{2x^4-1}{x^2-x-2}dx$.

14. 1) $\int \sqrt{1-e^{2x}}\cdot e^{2x}dx$;

2) $\int (x+1)\cdot e^x dx$;

3) $\int \frac{x^2+1}{x^2+6x+5}dx$.

15. 1) $\int \frac{e^{ctg10x}}{sin^2 10x}dx$;

2) $\int arccos\,3x\,dx$;

3) $\int \frac{x^3+3}{x^2-4x-5}dx$.

16. 1) $\int ctg(2x+1)\,dx$;

2) $\int x^2e^{2x}dx$;

3) $\int \frac{x^3-4}{x^2+3x-4}dx$.

17. 1) $\int \frac{arctg^6 3x}{1+9x^2}dx$;

2) $\int \sqrt{x}\cdot \ln x\,dx$;

3) $\int \frac{x^3-2}{x^2-5x+4}dx$.

18. 1) $\int \sqrt{9sin\,4x-5}\cdot cos4x\,dx$;

2) $\int x\cdot arctg4x\,dx$;

3) $\int \frac{x^3-3}{x^2-4x+3}dx$.

19. 1) $\int \frac{\ln^9(1-2x)}{1-2x}dx$;

2) $\int x\cdot sin3x\,dx$;

3) $\int \frac{2x^2+3}{x^2-x-2}dx$.

20. 1) $\int \frac{x^6}{\sqrt[5]{1-3x^7}}dx$;

2) $\int (1+x)\cdot \ln x\,dx$;

3) $\int \frac{x^3}{x^2-6x+8}dx$.

Задание 3

Найти площади плоских фигур, заключенных между линиями.

Задачи 21–30

21. $y = \sin 2x$, $y = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

22. $y = \cos 0{,}5x$, $y = 0$, $-\pi \le x \le -\frac{\pi}{3}$.

23. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 2$, $y = 0$.

24. $y = x^2$, $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

25. $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$.

26. $y = 2\cos x$, $y = 0$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

27. $y = 2\sin x$, $y = 0$, $\pi \le x \le 2\pi$.

28. $y = 3x^2$, $y = 1{,}5x + 4{,}5$, $y = 0$.

29. $y = \frac{9}{x^2}$, $y = 13 - 4x$.

30. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

Задание 4

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Задачи 31–40

31. $u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$.

32. $u_n = \frac{x^n}{3^n + 1}$.

33. $u_n = \frac{(-1)^n \cdot x^n}{\sqrt{5n+1}}$.

34. $u_n = \frac{n^{\frac{n}{5}} \cdot x^n}{n!}$.

35. $u_n = \frac{x^n}{7^n \cdot (n-1) \cdot (n+3)}$.

36. $u_n = \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

37. $u_n = \frac{2^n \cdot x^n}{n!}$.

38. $u_n = \frac{n^3 \cdot x^n}{(n+2)^n}$.

39. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cdot x^n}{\sqrt[5]{n^3} \cdot 5^n}$.

40. $u_n = \dfrac{5^n \cdot x^n}{n^2 + n}$.

Задание 5

Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 с помощью разложения подынтегральной функции в ряд по степеням x и последующего почленного интегрирования.

Задачи 41–50

41. $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^3}{7}}\,dx$.

42. $\int\limits_0^{0,5} arctg\, x^3 dx$.

43. $\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^3)\,dx$.

44. $\int\limits_0^1 x \cdot sin\, x^3\,dx$.

45. $\int\limits_0^1 sin\,\sqrt[3]{x}\,dx$.

46. $\int\limits_0^{0,6} x^2 \cdot arctg\, x^2 dx$.

47. $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{1}{x^2} \cdot e^{-x} dx$.

48. $\int\limits_0^{0,3} \sqrt[4]{1+x}\,dx$.

49. $\int\limits_0^{0,6} \dfrac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x^3)\,dx$.

50. $\int\limits_0^1 \sqrt{x} \cdot cos\, x^3\,dx$.

Задание 6

Решить задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.

Задачи 51–60

51. $y' - \dfrac{1}{x} y = x^5$, $y(1) = \dfrac{1}{5}$.

52. $y' + 3y = 5 \cdot e^{-3x}$, $y(0) = 1$.

53. $y' - 4y = -2 \cdot e^{4x}$, $y(0) = 2$.

54. $y' - \dfrac{1}{x} y = x \cdot sin\, x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

55. $y' + \frac{1}{x} y = \frac{e^x}{x}$, $y(1) = e$.

56. $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y(1) = -5$.

57. $y' - \frac{3x^2}{2+x^3} \cdot y = (2+x^3)^2$, $y(0) = 6$.

58. $y' - \frac{1}{cos^2 x} \cdot y = 4 \cdot e^{tg\,x}$, $y(0) = -3$.

59. $y' + \frac{1}{sin^2 x} \cdot y = -6 \cdot e^{ctg\,x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi$.

60. $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot y = -2 \cdot e^{arcsinx}$, $y(0) = 7$.

Задание 7

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Задачи 61–70

61. $y'' - 6y' + 5y = 2x^2 + x$.
62. $y'' + 4y' + 4y = 3sin\,x$.
63. $y'' - 4y' + 5y = 4 \cdot e^{3x}$.
64. $y'' - 5y' = x^2$.
65. $y'' - 3y' - 10y = -2 \cdot e^{5x}$.
66. $y'' - 6y' + 9y = -7 \cdot e^{3x}$.
67. $y'' - 2y' + 10y = -5x^2$.
68. $y'' + 5y' = 7 \cdot e^{2x}$.
69. $y'' + 10y' + 25y = x^2 - 3x + 5$.
70. $y'' - 4y' - 21y = sin\,x + cos\,x$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Шипачев В. С. Задачи по высшей математике: Учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1997. — 304 с.

Сборник индивидуальных учебных заданий по высшей математике: Учебное пособие: В 3 ч. Ч. 1 / *А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть*; Под общ. ред. *А. П. Рябушко*. — Мн.: Вышэйшая школа, 1990. — 270 с.

Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. — Мн.: Вышэйшая школа, 1976. — 720 с.

Шипачев В. С. Основы высшей математики: Учебное пособие для вузов / Под ред. *А. Н. Тихонова*. — 3-е изд., стер. — М.: Высшая школа, 1998. — 479 с.

Минюк С. А., Ровба Е. А. Высшая математика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей высших учебных заведений. — Гродно: Гродненский государственный университет, 2000. — 394 с.

Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс: Учебное пособие / *А. В. Кузнецов, Д. С. Кузнецова, Е. И. Шилкина и др*. — Мн.: Вышэйшая школа, 1994. — 284 с.

Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. — 3-е изд., стер. — Мн.: Вышэйшая школа, 1976. — 456 с.

Высшая математика. Общий курс: Учебник / *А. И. Яблонский, А. В. Кузнецов, Е. И. Шилкина и др*.; Под общ. ред. *С. А. Самаля*. — Мн.: Вышэйшая школа, 2000. — 351 с.

Гусак А. А. и др. Справочник по высшей математике / *А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова*. — Мн.: ТетраСистемс, 1999. — 640 с.

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов. — 7-е изд., испр. — М.: Наука, 1989. — 656 с.

Гусак А. А. Задачи и упражнения по высшей математике: В 2 ч. Ч. 1. — 2-е изд., перераб. — Мн.: Вышэйшая школа, 1988. — 247 с.

Данко П. Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. Ч. 1 / *П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова*. — 5-е изд., испр. — М.: Высшая школа, 1999. — 304 с.

Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для вузов. — 13-е изд., стер. — М.: Наука, 1987. — 352 с.

Высшая математика. Общий курс: Учебник / *А. В. Кузнецов, Л. Ф. Янчук, С. А. Мызгаева и др.*; Под общ. ред. *А. И. Яблонского*. — Мн.: Вышэйшая школа, 1993. — 349 с.

Жевняк Р. М. и др. Общий курс высшей математики: Учебное пособие для экономических специальностей вузов / *Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, А. И. Марченко, В. Т. Унукович.* — Орша, 1996. — 320 с.

Красс М. С. Математика для экономических специальностей: Учебник. — М.: Инфра-М, 1999. — 464 с.

Гусак А. А. Высшая математика: В 2 т. Т. 1. — 2-е изд., испр. — Мн.: ТетраСистемс, 2000. — 544 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ОБЩИЙ КУРС

Пособие
(программа курса, задания контрольных работ № 1 и № 2
и методические рекомендации по их выполнению)
для студентов первого курса заочной формы обучения
специальностей «Коммерческая деятельность»,
«Товароведение и экспертиза товаров», «Маркетинг»

Авторы-составители:
Кохно Александр Павлович
Романенко Николай Денисович
Мокеева Светлана Александровна
Кузменкова Инна Анатольевна

Редактор *О. М. Ковалева*
Компьютерная верстка *И. Г. Лейковская*

Подписано в печать 25.11.02.Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага типографская № 1. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 6,04. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 625 экз. Заказ №

УО «Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации».
Лицензия ЛВ № 111 от 21.01.02.
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

Отпечатано на ризографе
УО «Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации».
Лицензия ЛП № 112 от 10.01.02.
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.